Feuille d'exercices 1. Ensembles, opérations ensemblistes, sup, inf, limites inf et sup

Ensembles et opérations ensemblistes [1]

Exercice 1 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application, $\{A_j\}_{j\in J}$ et $\{B_i\}_{i\in I}$ deux familles de sous-ensembles de respectivement E et F indexées par deux ensembles I et J (éventuellement infinis).
Pour $A \subset E$ (resp. $B \subset F$) une partie de E (resp. F), on définit l'*image directe $f(A)$ de A* et l'*image réciproque $f^{-1}(B)$ de B* par

$$f(A) = \{f(x),\, x \in A\} \quad \text{et} \quad f^{-1}(B) = \{x \in E,\, f(x) \in B\}.$$

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$. Déterminer les images directes de $\mathbb{R}$, de $[-\pi/2, \pi/2]$, de $[0, \pi/2]$,de $[0, \pi]$, puis les images réciproques de $\mathbb{R}$, de $[-3, -2]$, de $[-1, 1]$, de $[0, 1]$.
Remarque: f est elle inversible ? Commenter.
2) Montrer que l'on a

$$f(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} f(A_j) \quad \text{et} \quad f(\bigcap_{j\in J} A_j) \subset \bigcap_{j\in J} f(A_j)\,.$$

3) Montrer que

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)\,, \quad \text{puis}$$

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c \quad \text{et} \quad f\big(f^{-1}(B) \bigcap A\big) = B \bigcap f(A)\,.$$

4) La *différence symétrique* des ensembles A et B est définie par $A\triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Comparer $f(A\triangle B)$ et $f(A)\triangle f(B)$ puis $f^{-}(A\triangle B)$ avec $f^{-1}(A)\triangle f^{-1}(B)$.

Exercice 2 Soit $f : E \to F$ une application. Montrer les équivalences suivantes.
- f surjective si et seulement si pour tout $B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B$
- f injective ssi pour tout $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) = A$
- f injective ssi pour tous $A \subset E, B \subset E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- f bijective ssi pour tout $A \subset E$, $(f(A))^c = f(A^c)$

Exercice 3 Soit X un ensemble, et $A \subset X$. La *fonction indicatrice*[2] de A est la fonction $1_A : X \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \in A^c$.
(a) Déterminer $\mathbf{1}_\emptyset$ et $\mathbf{1}_X$.
(b) Quelles sont les images réciproques $(\mathbf{1}_A)^{-1}(Y)$ des parties de $\mathbb{R}$?
(c) Soient A et B deux parties de X. Exprimer les fonctions indicatrices de $A^c, A\cup B, A\cap B, A\Delta B$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.
(d) Soit $f : X \to \{0, 1\}$ une application. Construire un ensemble $A \subset X$ tel que $f = \mathbf{1}_A$.
(e) Soit $f : X \to Y$ une application, $A \subset X$ un ensemble. Quelle relation y a-t-il entre les indicatrices de A et $f(A)$?

Exercice 4 (Limites supérieures et inférieures de suites d'ensembles) Soit E un ensemble, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n \subset E$ une partie de E. La *limite supérieure* de la suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble, noté $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ ou $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, des $x \in E$ qui appartiennent à une infinité de A_n. La *limite inférieure* de la suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ des $x \in E$ qui appartiennent à tous les A_n à partir d'un certain rang.

a) Montrer que $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$ et $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{k\geq n} A_k$.
b) Montrer que $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$, et $\underline{\lim}_{n\to\infty} (A_n)^c = \big(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n\big)^c$.

Exercice 5 Dans chacun des exemples suivants, calculez les ensembles $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\limsup_{n\to\infty} A_n$, $\liminf_{n\to\infty} A_n$, et $\lim_{n\to\infty} A_n$ quand elle existe.
- $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, avec F, G deux sous-ensembles d'un ensemble E,
- $B_n = [0, \frac{1}{n+1}]$, $n \geq 0$
- $C_n = [x, y - \frac{1}{n}]$, $n \geq 1$
- $D_n = [x, y - \frac{1}{n}[$ $n \geq 1$,
- $E_n = [x + \frac{1}{n}, y]$ $n \geq 1$
- $F_n =]x - \frac{1}{n}, y]$ $n \geq 1$
- $G_n = B(O, \frac{1}{n+1}) \subset \mathbb{R}^2$
- $H_n = n\mathbb{Z}$

[1] On ne vous a jamais défini les *ensembles*. Intuitivement, un ensemble est une collection d'objets, appelés ses *éléments*. On peut ensuite définir la réunion, l'intersection, la différence, la différence symétrique d'ensembles, un sous-ensemble (ou partie) d'un ensemble, le complémentaire d'un ensemble à l'intérieur d'un autre, et aussi l'ensemble vide, qui n'a aucun élément.
[2] Elle est aussi appelée *fonction caractéristique*, notée χ_A, mais cette notation posera problème en cours de probas au S6, nous préférerons donc la première en TD d'intégration.

Bornes inférieure et supérieure d'un ensemble [3]

Exercice 6 On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup -\infty, +\infty$ la droite réelle complétée. Trouver les bornes supérieure et inférieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) des parties suivantes:
$A = \{n^{-1},\ n > 0\}$
$B = \{2^{-(n+1)}(1 + (-1)^n) + 3^n(1 + (-1)^{n+1}),\ n \geq 0\}$
$C = \{2^{-(n+1)}(1 + (-1)^n) + 1 - 3^{-n}(1 + (-1)^{n+1}),\ n \geq 0\}$

Exercice 7 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels, on définit $\sup(u_n)$ comme $\sup u_n := \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Pour chacune des suites suivantes, déterminer $\inf u_n$ et $\sup u_n$:
a) $u_n = \frac{1}{n+1}$, b) $u_n = \cos(n)$, c) $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$, d) $u_n = e^{-n}$, e) $u_n = (-1)^n$, f) $u_n = \frac{n}{1+n^2}$ g) $u_n = \sin(n^2 + 1)$

Exercice 8 Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
(a) Si $A \subset B$, montrer que $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$. Donner des exemples où les inégalités sont strictes. Donner d'autres exemples avec $\sup A = \sup B$ ou $\inf A = \inf B$ et A strictement inclus dans B.
(b) On ne suppose plus $A \subset B$. Montrer que $A \cap B$ est borné, mais pas forcément non vide.
(c) Si $A \cap B \neq \emptyset$, montrer que $\max(\inf A,\ \inf B) \leq \inf A \cap B \leq \sup A \cap B \leq \min(\sup A,\ \sup B)$.
Donner un exemple dans lequel les inégalités sont strictes.

Exercice 9 Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
Montrer que $A \cup B$ est non vide et borné, et que

$$\inf(A \cup B) = \min(\inf A,\ \inf B) \quad \sup(A \cup B) = \max(\sup A,\ \sup B) \quad \text{et} \quad \sup(-A) = -\inf(A).$$

Exercice 10 Si A et B sont 2 parties de $\mathbb{R}$, on pose $A + B = \{x + y\ ;\ x \in A,\ y \in B\}$.
(a) Donner des exemples tels que $A + B \neq A \cup B$. **(b)** Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Limites inférieure et supérieure de suites

Exercice 11 Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$.
1) Montrer que les suites $s_n = \sup\{x_k,\ k \geq n\}$ et $i_n = \inf\{x_k,\ k \geq n\}$ sont respectivement décroissante et croissante.
2) En déduire qu'elles convergent.
La limite de la suite s_n est notée $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$ ou $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$ et est appelée *limite supérieure* de $(x_n)_{n\geq 0}$.
La limite de la suite i_n est notée $\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$ ou $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ et est appelée *limite inférieure* de $(x_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 12 Calculer les limites supérieures et inférieures des suites de l'exercice 7. Comparer $\limsup_{n\to\infty} u_n$ avec $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$, et $\liminf_{n\to\infty} u_n$ avec $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Exercice 13 Calculer les limites supérieures et inférieures des suites définies par:
(a) $a_n = (-1)^n$
(b) $b_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$
(c) $c_{3n} = 1, c_{3n+1} = 0, c_{3n+2} = -1$
(d) $d_n = (1 + \frac{(-1)^n}{n})\cos(n\pi/3)$

Exercice 14 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E. Montrer que $\liminf\limits_{n\to\infty} 1_{A_n} = 1_{\liminf_{n\to\infty} A_n}$, et $\limsup\limits_{n\to\infty} 1_{A_n} = 1_{\limsup_{n\to\infty} A_n}$.

Exercice 15 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de $\overline{\mathbb{R}}$.
(a) Si pour tout $n \geq 0$, $a_n \leq b_n$ alors montrer que $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ et $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.
(b) Montrer que $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.
Montrer par des exemples que ces inégalités peuvent être strictes.
(c) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ et $\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

Exercice 16 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Démontrer les propriétés suivantes
(a) $\underline{\lim}_{n\to\infty} u_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} u_n$.
(b) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(-u_n) = -\underline{\lim}_{n\to\infty}(u_n)$
(c) Si $l = \overline{\lim}_{n\to\infty} u_n$ (resp. $l = \underline{\lim}_{n\to\infty} u_n$), alors (u_n) admet une sous-suite qui converge vers l.
(d) La suite (u_n) converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\underline{\lim}_{n\to\infty} u_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} u_n = l$.

Exercice 17 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sqrt{n+1} - E(\sqrt{n})$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Montrer que $\underline{\lim}_{n\to\infty}(u_n) = 0$ et $\overline{\lim}_{n\to\infty}(u_n) = 1$.

Exercice 18 Si (a_n) est une suite périodique, c'est-à-dire, s'il existe un entier k tel que $a_{n+k} = a_n$ pour tout n; quelles sont les limites inférieure et supérieure de la suite?

Exercice 19 Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombre réels. Soit $A_n =]-\infty, a_n]$ pour tout $n \geq 1$. Que peut-on dire de $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ et $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$.

[3] Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. Sa *borne supérieure* est le plus petit des majorants de E, i.e. l'unique réel noté $\sup E$ tel que (i) $\forall x \in E$, $x \leq \sup E$ et (ii) si $M \in \mathbb{R}$ vérifie $\forall x \in E$, $x \leq M$, alors $M \geq \sup E$. L'existence de $\sup E \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est un *axiome* dans la construction de l'ensemble des nombres réels.