Corrigé devoir 2

Exercice 17 feuille 3

Nous allons utiliser le critère suivant du cours: h est mesurable ssi pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $h^{-1}([\alpha, +\infty|[)$ est mesurable.
Ici, si $\alpha > 0$, $h^{-1}([\alpha, +\infty|[) =]0, \frac{1}{\alpha}] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est borélien comme intersection de deux boréliens. Si $\alpha \leq 0$, $h^{-1}([\alpha, +\infty|[) = \mathbb{Q} \cup \big(] - \infty, \frac{1}{\alpha}] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\big) \cup]0, +\infty[$ est également borélien.

On peut vérifier que si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, et $\alpha > 0$, $g^{-1}([\alpha, +\infty[) = [E(\alpha) + 1, +\infty[\setminus\mathbb{Z}$ est un borélien. Si $\alpha \leq 0$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $g^{-1}([\alpha, +\infty[) = [E(\alpha) + 1, +\infty[$ est borélien. Si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$, $g^{-1}([\alpha, +\infty[) = [\alpha), +\infty[$ est borélien. Si $\alpha \in \mathbb{Z}_+^*$, $g^{-1}([\alpha, +\infty[) = [\alpha), +\infty[\setminus\mathbb{Z}$ est borélien.

Pour f, c'est encore plus simple: si $\alpha \in \mathbb{Z}$, $f^{-1}([\alpha, +\infty[) = [\alpha, +\infty[$ est borélien. Si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $f^{-1}([\alpha, +\infty[) = [E(\alpha), +\infty[$ est borélien.

Exercice 15 feuille 4

Lorsque $E = [a, b]$ et $r > 0$, $rE = [ra, rb]$ et $\lambda(rE) = r(b - a) = r\lambda(E)$. (Idem pour un intervalle ouvert ou semi ouvert). Lorsque $r < 0$, $rE = [rb, ra]$ et $\lambda(rE) = r(a - b) = |r|(b - a) = |r|\lambda(E)$.
Si E est ouvert, il existe une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints I_n, $n \in \mathbb{N}$ tels que $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et $rE = \cup_{n\in\mathbb{N}} rI_n$. Les intervalles rI_n, $n \in \mathbb{N}$ sont encore deux à deux disjoints. On en déduit que $\lambda(rE) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(rI_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |r|\lambda(I_n) = |r|\lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}} = |r|\lambda(E)$.
Remarquons que $r(A^c) = (rA)^c$. On en déduit que pour tout fermé F, on a $\lambda(rF) = |r|\lambda(F)$.
Si E est un ensemble Lebesgue-mesurable, alors d'après le cours, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $F_\varepsilon \subset E \subset \Omega_\varepsilon$ avec $\lambda(\Omega_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$. On remarque que $rF_\varepsilon \subset rE \subset r\Omega_\varepsilon$, rF_ε est fermé, et $r\Omega_\varepsilon$ est ouvert. De plus $\lambda(r\Omega_\varepsilon \setminus rF_\varepsilon) \leq |r|\varepsilon$ d'après ce qui précède. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\lambda(rE) = |r|\lambda(E)$. Les boréliens étant tous Lebesgue-mesurables, on en déduit le résultat voulu.

Exercice 16 feuille 4
Question 2 : si $x \in A + u \cap A + v$, alors $x - u \in A$ et $x - v \in A$. De plus, $u, v \in \mathbb{Q}$ donc $(x - u)R(x - v)$. Tout point de $\mathbb{R}$ étant équivalent à un unique point de A, on en déduit que $x - u = x - v$, d'où $u = v$.
Question 3: Si A est mesurable, alors $A + u$ aussi (image réciproque de A par l'application continue $x \mapsto x - u$). On en déduit que B est mesurable, et que B est l'union disjointe des $A + u$, $u \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. On a donc $\lambda(B) = \sum_{u\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \lambda(A + u)$. La mesure de Lebesgue est invariante par translation, donc $\lambda(A + u) = \lambda(A)$. Donc $\lambda(B) = \#\mathbb{Q} \cap [-1, 1] \times \lambda(A)$.
Question 4: Si A mesurable, on a forcément $\lambda(B) \leq 3$, donc $\lambda(A) = 0$. Mais $\lambda(B) \geq 1$ implique $\lambda(A) > 0$. Contradiction!

Exercice 8 feuille 5
1)f est une fonction mesurable positive, donc d'après la relation de Chasles:
$$\int_X f d\mu = \int_{E_n} f d\mu + \int_{\{f<n\}} f d\mu = \int_{E_n} f d\mu + \int_X 1_{\{f<n\}} f d\mu.$$
Soit $g_n = f.1_{\{f<n\}}$, $(g_n)_n$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge vers f.
D'après le théorème de Beppo-Levi, $\lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X f d\mu$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} f d\mu = 0$.
Les F_n sont deux à deux disjoints, d'après la relation de Chasles :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{F_n} f d\mu = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_{F_n} f d\mu = \lim_{N\to+\infty} \int_{\cup_{n=0}^N F_n} f d\mu.$$
$F_n = E_n \cap E_{n+1}^c = \{x \in X, n \leq f(x) < n + 1\}$, $\cup_{n=0}^N F_n = \cup_{n=0}^N \{x \in X/n \leq f(x) < n + 1\} = \{0 \leq f < N + 1\} = E_0 \cap E_{N+1}^c$.
2)Par l'inégalité de Markov, $\forall n > 0$, $\mu(E_n) \leq \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_{E_n} f d\mu$.
D'où $0 \leq n\mu(E_n) \leq \displaystyle\int_{E_n} f d\mu$. On passe ensuite la limite et on utilise la première question pour obtenir: $\lim_{n\to+\infty} n\mu(E_n) = 0$.

Comme précédemment, $\forall n > 0$, $n\mu(F_n) \leq \int_{F_n} f d\mu$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{F_n} f(x)d\mu(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{F_n} f(x)d\mu(x) < +\infty$ d'après la question 1).

Or $\sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(F_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(\mu(E_n) - \mu(E_{n+1})$ car $\mu(E_n) < +\infty$.

$\sum_{n=1}^{N} n\mu(F_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(E_n) - N\mu(E_{N+1})$, puis on utilise le résultat de la première question pour obtenir:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) < +\infty$.

Exercice 21 feuille 5

a)Soit $a > 0$, $\int_0^t |e^{-nx} sin(ax)|dx \leq \int_0^t axe^{-nx}dx \leq a\Big[\frac{te^{-nt}}{-n} + \frac{e^{-nt}}{-n^2} + \frac{1}{n^2}\Big]$.

$\int_0^{+\infty} |e^{-nx}sin(ax)|dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t |e^{-nx}sin(ax)|dx \leq \frac{a}{n^2}$. Or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2} < +\infty$, donc $\int_0^t |e^{-nx}sin(ax)|dx < +\infty$.

b)$\int_0^{+\infty} |e^{-nx}sin(ax)|dx = \int_{[0,+\infty[} |e^{-nx}sin(ax)|d\lambda(x)$.

Soit $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |e^{-nx}sin(ax)|$. g est une fonction mesurable (limite de fonctions mesurables), positive.

En appliquant le théorème de Beppo-Levi, on montre que $\int_{[0,+\infty[} gd\lambda < +\infty$, donc g est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Soit $g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} e^{-nx}sin(ax)$. $|g_N| \leq g$ et $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables qui converge simplement sur $[0, +\infty[$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\lim_{N\to+\infty} \int g_N d\lambda = \int \lim_{N\to+\infty} g_N d\lambda$. On intervertit ensuite limite finie et intégrale pour obtenir: $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[0,+\infty[} e^{-nx}sin(ax)d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}sin(ax)d\lambda(x)$.

Or $\int_{[0,+\infty[} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}sin(ax)d\lambda(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} d\lambda(x)$.

Par une double intégration par parties, on obtient: $\int_{[0,+\infty[} e^{-nx}\sin(ax)d\lambda(x) = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-nx}\sin(ax)d\lambda(x) = \frac{a}{n^2 + a^2}$.

Exercice 22 feuille 5

1) La fonction $u \mapsto ue^{-u}$ est bornée par une constante $M > 0$ sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $\frac{1}{nx}e^{-x/n} \leq \frac{M}{x^2}$. $x \mapsto M/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Le théorème de convergence dominée s'applique donc et donne $\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{1}{nx}e^{-x/n}dx \to \int_1^\infty \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{nx}e^{-x/n})dx = 0$.

2) La fonction $x \mapsto |\sin(1/nx^2)|$ est continue et bornée (par 1)sur $]0, 1[$, elle est donc intégrable sur $]0, 1[$ Sur $[1, +\infty[$, notons que $|\sin(1/nx^2)| \leq 1/(nx^2) \leq 1/x^2$ pour tout $n \geq 1$. La fonction $x \mapsto 1$ si $x \in [0, 1]$ et $x \mapsto 1/x^2$ sur $[1, +\infty[$ est intégrable. Le théorème de convergence dominée s'applique donc et donne $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \sin(\frac{1}{nx^2})dx = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{nx^2})dx = 0$. Bien sûr, la même chose est vraie sur $\mathbb{R}_-$ par parité de la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{nx^2})$.