

**Corrigé exercice 2 feuille 6**

Posons  $f(t, x) = e^{-x/t}$ . À  $t \in ]0, 1]$  fixé,  $x \mapsto f(t, x)$  est  $C^\infty$ . A  $x \geq 0$  fixé,  $t > 0 \mapsto f(t, x)$  est continue donc mesurable. De plus,  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -\frac{1}{t}e^{-x/t}$  pour  $t > 0$ .

1) Le théorème de continuité sous le signe intégrale s'applique car  $|f(t, x)| \leq 1$  pour tout  $t > 0$  et  $x \geq 0$ ... et bien sûr, la fonction constante égale à 1 est intégrable sur  $[0, 1]$  muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Donc  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

2) Fixons  $\varepsilon > 0$ . Si  $x \geq \varepsilon$ ,  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq \frac{1}{t}e^{-\varepsilon/t}$ . La fonction  $t \mapsto g(t) = \frac{1}{t}e^{-\varepsilon/t}$  est intégrable sur  $]0, 1]$ . (En effet, si ce n'est plus évident pour vous, remarquez que la fonction continue  $t > 0 \mapsto \frac{1}{t}e^{-\varepsilon/t}$  se prolonge par continuité en 0 par 0.) Donc le théorème de dérivation sous le signe intégrale s'applique.  $F$  est dérivable sur  $[\varepsilon, +\infty[$  et  $F'(x) = \int_0^1 -\frac{1}{t}e^{-x/t} dt$ . Le théorème de continuité sous le signe intégrale nous permet de dire que  $F'$  est continue sur  $[\varepsilon, +\infty[$ . Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on en déduit que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**A noter! C'est un raisonnement classique: le théorème de dérivation ne s'applique pas tel quel sur  $\mathbb{R}_+^*$ , car on n'arrive pas à dominer uniformément en  $x > 0$  la dérivée partielle. On suppose donc que  $x$  varie dans un sous-intervalle  $I_\varepsilon$  de  $\mathbb{R}_+^*$ , souvent compact pour dominer plus facilement la dérivée partielle. Ici, on prend  $I_\varepsilon = [\varepsilon, +\infty[$ , fermé, non compact, mais qui "évite" le point 0 qui pose problème (cf question 3). On montre que le théorème de dérivation s'applique sur  $I_\varepsilon$ , puis, ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on en déduit que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .**

3) Que se passe-t-il en 0? Calculons  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{F(x) - 1}{x}$ . Pour appliquer Beppo-Levi, on considère la suite (par exemple)  $x_n = 1/n$ . La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $t \mapsto f_n(t) = \frac{1 - e^{-1/nt}}{1/n}$  est positive et croissante. Par le théorème de convergence monotone, on obtient (attention aux signes)  $\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{F(x_n) - F(0)}{x_n} = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1 - e^{-1/nt}}{1/n} dt = \int_0^1 -\frac{1}{t} dt = -\infty$ . Donc  $F$  n'est pas dérivable en 0.

**Corrigé exercice 3 feuille 6**

Voir la page web de Samuel Petite, peut-être, si vous êtes sages...

**Corrigé exercice 4 feuille 6**

On vérifie par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}$  que  $\frac{\partial^{2p} f}{\partial t^{2p}}(x, t) = (-1)^p x^{2p} \cos(xt) e^{-x^2}$  et  $\frac{\partial^{2p+1} f}{\partial t^{2p+1}}(x, t) = (-1)^p x^{2p+1} \sin(xt) e^{-x^2}$ . On en déduit pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\left| \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x, t) \right| \leq x^k e^{-x^2}$  qui est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Par ailleurs, ces dérivées partielles sont toutes  $C^\infty$  par rapport aux deux variables donc dérivables par rapport à  $t$  pour tout  $x$  fixé, et mesurables comme fonctions de  $x$  pour tout  $t$  fixé.

Par récurrence, on montre donc que  $F$  est dérivable donc continue, puis  $F'$  est dérivable donc continue, etc...

De plus une intégration par parties permet d'obtenir  $F'(t) = -\frac{t}{2} F(t)$ . Or  $F(0) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ . On en déduit en résolvant l'équation différentielle (équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants) que  $F(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-t^2/4}$ .