Université de Picardie Jules Verne
Licence de Mathématiques

Année 2004-2005

L3 – Devoir 4 – Intégration 1

À rendre pour le 8 ou 9 décembre (13 décembre dernier délai pour les retardataires

Remarque préliminaire

-Ceux qui ont eu la moyenne ou presque au partiel essaieront d'en faire le plus possible, idéalement tout le sujet!

-Ceux qui ont eu entre 5 et 10 au partiel essaieront de faire des questions valant au moins (suivant le barême indiqué) entre 12 et 15 points au total.

-Ceux qui ont eu moins de 5 au partiel essaieront de faire des questions valant au moins 10 points au total.

LM1 – Partiel de Calcul Intégral du 29 mars 2003

Attention: *Documents non autorisés. On s'attachera à rédiger de façon claire, précise et concise, et à justifier l'utilisation des résultats du cours.*

Exercice I. Les questions suivantes sont indépendantes.

I.1.(1 pt) Trouver une suite de nombres réels $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Question subsidiaire (bonus 1,5 pts): Y a-t-il une suite $\{b_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout nombre rationnel $r \in \mathbb{R}$, il existe une sous-suite b_{n_k} tendant vers r? (justifier votre réponse).

I.2.(1 pt) Trouver une suite de sous-ensembles $(A_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}$ telle que

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \emptyset, \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = [0,1].$$

I.3.(1 pt) Montrer que Card $\mathbb{N}$ = Card $2\mathbb{N}$ et que Card $]0,1[$ = Card $\mathbb{R}$.

I.4.(1,5 pts) Soit $X = \{a,b,c,d\}$ un ensemble à quatre éléments. Déterminer la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par les ensembles suivants: $A = \{a,b\}, B = \{c\}, C = \{d\}$. Donner une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ qui n'est pas $\mathcal{A}$-mesurable.

I.5.(2 pts) Considérons la fonction $g :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (-1)^{n+1}n$ pour $x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Montrer que g n'est pas Lebesgue intégrable, mais improprement intégrable.

I.6.(2 pts) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to b} f(x) = L$ ($b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$) si et seulement si $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$ quelle que soit la suite x_n tendant vers b. En déduire que si g est une fonction Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}^+$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^+} g(x)d\lambda(x) = \lim_{T\to\infty} \int_{[0,T]} g(x)d\lambda(x).$$

♢ ♢ ♢

Exercice II. On étudie le comportement à l'infini d'une fonction intégrable.

II.1.(1,5 pts) Soit $h : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ une fonction positive ou nulle Lebesgue-intégrable. Montrer que $h(x) < \infty$ p.p. (relativement à la mesure de Lebesgue).

II.2.(1,5 pts) Dans la suite, on considère une fonction continue et Lebesgue intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $\gamma > 0$. Montrer que pour tout $\gamma > 0$ on a $\int_{[-n,n]} f(\gamma x)d\lambda(x) = \frac{1}{\gamma}\int_{-[\gamma n,\gamma n]} f(x)d\lambda(x)$ et puis

$$\int_{\mathbb{R}} f(\gamma x)d\lambda(x) = \frac{1}{\gamma}\int_{\mathbb{R}} f(x)d\lambda(x).$$

II.3.(2 pts) Supposons que $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres positifs. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f(\gamma_n x)| < \infty \quad \text{p.p.}$$

(Vous pouvez utiliser **II.1.**). En déduire alors que $\lim_{n\to\infty} f(n^2x) = 0$ p.p.

II.4.(1,5 pts) Posons

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - n^2|x - n^2|) 1_{[n^2-n^{-2}, n^2+n^{-2}]}(x).$$

Montrer que g est continue et Lebesgue-intégrable, et que $\lim_{n\to\infty} g(n^2) \neq 0$.

♢ ♢ ♢

Exercice III. Considérons la fonction suivante

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

(Les intégrales dans cet exercice sont au sens de Lebesgue).

III.1.(1,5 pts) Montrer que la fonction $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$ est Lebesgue intégrable sur $[0, \infty[$ et en déduire que $F(a)$ est bien définie pour tout $a \in \mathbb{R}$.

III.2.(1 pt) Montrer que

$$F(a) = \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \right) \sin ax \; dx.$$

III.3.(2 pts) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-nx} \sin ax dx = \frac{a}{n^2 + a^2}$ et $F(a) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

III.4.(2 pts) Montrer que

$$F'(0) = \lim_{a\to 0} \int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{a(e^x - 1)} dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx \quad , \quad \text{et que}$$

$$\frac{d}{da} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} \right)_{a=0} = \lim_{a\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

En déduire que

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$