Université de Picardie Jules Verne 2009-2010
UFR Sciences Licence L3 S5 Intégration

Corrigé devoir 1 intégration pour le 8 octobre

Exercice 5 feuille 1 Dans chacun des exemples suivants, calculez les ensembles $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, $\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n$, $\limsup_{n\to\infty} A_n$, $\liminf_{n\to\infty} A_n$, et $\lim_{n\to\infty} A_n$ quand elle existe.
• $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, avec F, G deux sous-ensembles d'un ensemble E, • $B_n = [0, \frac{1}{n+1}]$, $n \geq 0$
• $C_n = [x, y - \frac{1}{n}]$, $n \geq 1$ • $D_n = [x, y - \frac{1}{n}[$ $n \geq 1$, • $E_n = [x + \frac{1}{n}, y]$ $n \geq 1$ • $F_n =]x - \frac{1}{n}, y]$ $n \geq 1$
• $G_n = B(O, \frac{1}{n+1}) \subset \mathbb{R}^2$ • $H_n = n\mathbb{Z}$

Corrigé On corrige ce qui n'a pas été fait en TD. Supposons $x \leq y - 1$ pour simplifier. Alors $\cup_{k\geq n}C_k = [x, y[$ d'où $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} \cup_{k\geq n} C_k = \limsup_{n\to\infty} C_n = [x, y[$. De même $\cap_{k\geq n}C_k = C_n$ d'où $\liminf_{n\to\infty} C_n = \cup_{n\in\mathbb{N}^*}C_n = [x, y[$. Et $\cap_{n\in\mathbb{N}^*}C_n = [x, y-1]$.

Le même raisonnement donne $\cup_{n\in\mathbb{N}^*}D_n = [x, y[$, $\cap_{n\in\mathbb{N}^*}D_n = [x, y-1[$, et $\limsup_{n\to\infty} D_n = \liminf_{n\to\infty} D_n = [x, y[$.

On vérifie ensuite que $\cup_{n\in\mathbb{N}^*}E_n =]x, y]$, $\cap_{n\in\mathbb{N}^*}E_n = [x+1, y]$, $\limsup_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty} E_n =]x, y]$.

De même $\cup_{n\ in\mathbb{N}^*}F_n =]x-1, y]$, $\cap_{n\in\mathbb{N}^*}F_n = [x, y] = \limsup_{n\to\infty} F_n = \liminf_{n\to\infty} F_n$.

Dans $\mathbb{R}^2$, un raisonnement similaire donne $\cup_{n\in\mathbb{N}}G_n = B_0 = B(0, 1)$, $\cap_{n\in\mathbb{N}}B_n = \{0\} = \limsup_{n\to\infty} B_n = \liminf_{n\to\infty} B_n$.

On remarque que lorsque la suite est monotone croissante ou décroissante pour l'inclusion, la limite supérieure et la limite inférieure coïncident.

Soit $H_n = n\mathbb{Z}$. Il est clair que $\cup_{n\in\mathbb{N}}H_n = \mathbb{Z}$, alors que $\cap_{n\in\mathbb{N}}H_n = \{0\}$ car aucun entier non nul n'est multiple de tous les entiers.

Exercice 8 feuille 1 Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
(a) Si $A \subset B$, montrer que $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$. Donner des exemples où les inégalités sont strictes. Donner d'autres exemples avec $\sup A = \sup B$ ou $\inf A = \inf B$ et A strictement inclus dans B.
(b) On ne suppose plus $A \subset B$. Montrer que $A \cap B$ est borné, mais pas forcément non vide.
(c) Si $A \cap B \neq \emptyset$, montrer que $\max(\inf A, \inf B) \leq \inf A \cap B \leq \sup A \cap B \leq \min(\sup A, \sup B)$.
Donner un exemple dans lequel les inégalités sont strictes.

Corrigé Si $A \subset B$, alors $\sup B$ majore B, donc A. Or $\sup A$ est le plus petit des majorants, donc $\sup B \geq \sup A$. De même, $infB$ minore B donc A, donc $\inf B \leq \inf A$. Exemples avec inégalités strictes: $A = [1, 2]$ et $B = [0, 3]$. Exemple avec égalité $A =]0, 1[\cup]2, 3[$ et $B = [0, 3]$.
b) Si A et B sont born és non vide, alors $A \cap B$ est borné aussi mais pas forcément non vide. Ex $A = [0, 1]$ et $B = [2, 3]$.
c) Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors en utilisant **a)**, et $A \cap B \subset A$, on a $\inf A \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \sup A$. En utilisant le fait que $A \cap B \subset B$, on a aussi $\inf B \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \sup B$. D'où le résultat. Les inégalités sont toutes strictes si $A = [0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5]$ et $B =]1, 4[$. On a

$$\max(\inf A, \inf B) = 1 < \inf(A \cap B) = 2 < \sup(A \cap B) = 3 < \min(\sup A, \sup B) = 4$$

Exercice 15 feuille 1 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de $\overline{\mathbb{R}}$.
(a) Si pour tout $n \geq 0$, $a_n \leq b_n$ alors montrer que $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ et $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.
(b) Montrer que $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.
Montrer par des exemples que ces inégalités peuvent être strictes.
(c) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + \underline{\lim}_{n\to\infty}b_n$ et $\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + \overline{\lim}_{n\to\infty}b_n$.

Corrigé
a) En utilisant l'hypothèse, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\sup_{k\geq n} a_k \leq \sup_{k\geq n} b_k$ d'où à la limite, $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$. De même, on montre que $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$.
b) On a pour tout $k \geq n$ $a_k + b_k \leq \sup_{k\geq n}(a_k) + b_k \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k$. En passant au sup à gauche de l'inégalité, on trouve $\sup_{k\geq n}(a_k + b_k) \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k$. La démonstration pour l'inf se fait de même.
c) Soit $\varepsilon > 0$, et $N \geq 0$ tq pour tout $n \geq N$, $|a_n - a| \leq \varepsilon$. On écrit alors pour $n \geq N$ $a_k + b_k \geq a - \varepsilon + b_k$. On en déduit immédiatement $\sup_{k\geq n}(a_k + b_k) \geq a - \varepsilon + \sup_{k\geq n} b_k$, d et donc $\limsup_{n\to\infty}(a_n + bn) \geq a - \varepsilon + \limsup_{k\geq n} b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n - \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$. L'autre inégalité ayant déjà été démontrée, on a l'égalité voulue. Le raisonnement est identique pour les liminf.

Exercice 16 feuille 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Démontrer les propriétés suivantes
(a) $\underline{\lim}_{n\to\infty}u_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}u_n$.
(b) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(-u_n) = -\underline{\lim}_{n\to\infty}(u_n)$
(c) Si $l = \overline{\lim}_{n\to\infty}u_n$ (resp. $l = \underline{\lim}_{n\to\infty}u_n$), alors (u_n) admet une sous-suite qui converge vers l.
(d) La suite (u_n) converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\underline{\lim}_{n\to\infty}u_n = \overline{\lim}_{n\to\infty}u_n = l$.

Corrigé a) On a $\inf_{k\geq n} u_k \leq \sup_{k\geq n} u_k$, donc à la limite $\liminf_{n\to\infty} u_n \leq \limsup_{n\to\infty} u_n$.
b) L'égalité voulue vient de $\sup_{k\geq n}(-u_k) = -\inf_{k\geq n} u_k$.
c-d) A été démontré en TD.

Exercice 13 feuille 2Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n}$.

Corrigé On étudie la suite $v_n = \ln(u_n) = -\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n \ln(n+k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n \ln(1+k/n)$. C'est une somme de Riemann qui converge quand $n \to \infty$ vers $\int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln 2 - 1$.

Exercice 14 feuille 2 Montrer que S_n est une somme de Riemann relativement à une fonction f que l'on précisera, puis déterminer la limite de (S_n).
(a) $S_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+4} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$ **(b)** $S_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+4} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$

Corrigé a) $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(k/n)^2} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
b) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k/n}{1+(k/n)^2} \to \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{\ln 2}{2}$

Exercice 15 feuille 2 (Intégrales de Wallis)Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt$.

Corrigé Par récurrence, à l'aide d'intégrations par parties, on vérifie que $I_0 = \frac{\pi}{2}$; $I_1 = 1$ et $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour $n \geq 2$. On en déduit que $I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ et $I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exercice 19 feuille 2 Soit $f_n(x) = x^n$. Calculer $\int_0^1 f_n(x)\,dx$, puis $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, mais pas uniformément vers la fonction définie par $f(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}$. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$. Commenter.

Corrigé L'intégrale $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ vaut $\frac{1}{n+1}$ et converge vers 0. La suite $(f_n)_{n\ in\mathbb{N}}$ converge simplement et pas uniformément vers 1_1. Pourtant on vérifie que l'intégrale de la limite des f_n est égale à la limite des intégrales des f_n.

Exercice 22 feuille 2 (La fonction Γ d'Euler)Posons $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$.
(a) Quel est son ensemble de définition ?
(b) Montrer qu'elle est continue, puis dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (énoncer précisément les résultats utilisés).
(c) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$ et $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé a) La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue, et intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $t^{x-1} = o_{+\infty}(e^{t/2})$ par exemple. Elle est intégrable au voisinage de 0 ssi $x > 0$ car $e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$ au voisinage de 0.
b) Voir vos cours de L1-L2 ou prépa. On fixe un intervalle du type $[\varepsilon, A]$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On utilise sur ce compact les théorèmes de continuité et dérivabilité classiques de l'an dernier pour obtenir la continuité de Γ en $x \in [\varepsilon, A]$, et donc pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ vu que ε et A sont arbitraires.
c) Une intégration par parties donne $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$. Un calcul élémentaire donne $\Gamma(1) = 1$, et donc finalement s $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec la convention $0! = 1$.)