Exercice 1

(1) et (2) Th CV dominée
$$\begin{cases} x \longmapsto \sin tx \,(1+t^2)^{-1} \text{ continue} \\ t \longmapsto \sin(tx)\,(1+t^2)^{-1} \text{ mesurable} \\ \underline{\text{contrôle}} \quad |\sin tx\,(1+t^2)^{-1}| \leq \dfrac{1}{1+t^2} \in L^1 \end{cases}$$

D'où F existe et est continue sur $\mathbb{R}$. F clairement impaire.

(3) et (4) On procède, pour $x>0$, à une intégration par parties
$$F(x) = -\int_0^{+\infty} \left(\frac{-\cos tx}{x}\right)\left(\frac{-2t}{(1+t^2)^2}\right) dt + \left[\frac{-\cos tx}{x(1+t^2)}\right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{x}\left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{2t\cos tx}{(1+t^2)^2}\, dt\right)$$

une nouvelle IPP donne
$$\int_0^{+\infty} \frac{2t\cos tx}{(1+t^2)^2}\, dt = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Alors $\quad F(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} \longrightarrow 0.$

(5) $\quad x F(x) = 1 - G(x) \quad$ où $\quad G(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\cos tx}{(1+t^2)^2}\, dt$

On va montrer que G est C^1
$$\begin{cases} t \longmapsto t\cos tx\,(1+t^2)^{-2} \text{ intégrable car contrôlée par } \dfrac{1}{1+t^2} \\ x \longmapsto t\cos tx\,(1+t^2)^{-2} \text{ dérivable de dérivée} \\ \qquad - t^2 \sin tx\,(1+t^2)^{-2} \\ \underline{\text{Contrôle}} : \ 1/1+t^2 \in L^1. \end{cases}$$

Donc G C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc F C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

(6) changement de variable $(x>0)$, $y = tx$
$$\frac{F(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{1+\frac{y^2}{x^2}}\, \frac{dy}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{x^2+y^2}\, dy$$