Corrigé du Partiel du 6/11/08, donné en devoir pour le 26/10/09

Exercice 1 *Dans cet exercice, on considère* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. *Soit la suite de fonctions* $u_n(x) = (1+\dfrac{x}{2n})^n e^{-x}\chi_{\mathbb{R}^+}(x)$; *où* $\chi_{\mathbb{R}^+}$ *désigne la fonction caractéristique de l'ensemble des réels positifs.*
1) Justifier le fait que u_n *soit mesurable. 2) Démontrer que* $u_n(x)$ *converge simplement vers la fonction* $u(x) = e^{-\frac{x}{2}}\chi_{\mathbb{R}^+}(x)$. *3) Calculer* $\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} u_n(x)dx$. *4) Soit la fonction mesurable* $v_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n e^{-\frac{x}{2}}\chi_{\mathbb{R}^+}(x)$; *déterminer* $\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} v_n(x)dx$.

Corrigé 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est mesurable comme produit de la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$, qui est mesurable car $\mathbb{R}_+$ est borélien (c'est un fermé!), et de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \left(1+\frac{x}{2n}\right)^n e^{-x}$, qui est continue, donc mesurable.
2) Fixons $x \geq 0$. Alors $(1+\frac{x}{2n})^n = \exp(n\log(1+\frac{x}{2n}) \sim \exp(\frac{x}{2})$ quand $n\to\infty$. Par ailleurs, si $x<0$, $u_n(x)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Donc la suite de fonctions $x\in\mathbb{R}\mapsto(1+\frac{x}{2n})^n\exp(-x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction qui est identiquement nulle sur $]-\infty,0[$ et sur $\mathbb{R}_+$ est définie par $x\in\mathbb{R}_+\mapsto e^{-x/2}$.
3) Appliquons le théorème de convergence dominée. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $u : x \mapsto \mathbf{1}_{R_+^*}(x)e^{-x/2}$. De plus, à l'aide de l'inégalité $\log(1+x)\leq x$, on voit aisément que $0\leq u_n(x)\leq u(x)=\exp(-x/2)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. La fonction u est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc l'hypothèse de contrôle uniforme est satisfaite, et le théorème de convergence dominée s'applique. On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} u_n(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-x/2}\,dx = 2\,.$
4) On utilise ici le lemme de Fatou. Les mêmes arguments qu'en 2) montrent que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $v : x\mapsto \mathbf{1}_{R_+^*}(x)e^{x/2}$. Cette fonction n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$, on a $\int_{\mathbb{R}} v(x)dx = +\infty = \int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}v_n(x)dx$. le théorème de convergence dominée ne s'applique donc pas. Le lemme de Fatou implique que $+\infty = \int_{\mathbb{R}}\liminf_{n\to\infty}v_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}v_n(x)dx$, d'où finalement $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}v_n(x)dx=+\infty$.

Exercice 2 *Soit* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *un espace mesuré. Pour une famille dénombrable d'ensembles mesurables* A_n, *on définit*

$$\overline{\lim}A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}}(\cup_{k\geq n}A_k).$$

1) Soit $B_n=\cup_{k\geq n}A_k$. *Montrer que* B_n *est mesurable. En déduire que* $\overline{\lim}A_n$ *est mesurable.*
On suppose dans la suite de l'exercice que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)<+\infty$.
2) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\mu(B_n)=0$.
3) Montrer que $\mu(\overline{\lim}A_n)=0$.
4) Dans cet exemple $(X,\mathcal{A},\mu)=([0,1],\mathcal{B},\lambda)$. *Pour un réel* y, *on définit la mantisse de* y *comme étant* $M(y)=y-E(y)$, *où* $E(y)$ *est la partie entière de* y. M *prend alors ses valeurs dans* $[0,1[$. *Soit* $A_n=[\frac{M(\log(n+1))}{2^n},\frac{M(\log(n+1))+1}{2^n}]$. *Montrer que l'ensemble* $\{x\in[0,1]; x$ *appartient à une infinité de* $A_n\}$ *est négligeable, c'est à dire de mesure nulle.*

Corrigé 1) Une tribu est stable par union dénombrable et intersection dénombrable. Donc B_n est mesurable pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $\limsup_{n\to\infty}A_n=\cap_{n\in\mathbb{N}}B_n$ est aussi mesurable.
2) On écrit $B_n=\cup_{k\geq n}B_k$, d'où $0\leq\mu(B_n)\leq\sum_{k\geq n}\mu(B_k)$. C'est le reste d'une série convergente, donc $\mu(B_n)\to0$ quand $n\to\infty$. 3) On a $\mu(\limsup_{n\to\infty}A_n)=\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}}B_n)$. Le résultat découle du théorème vu en cours: si $\mu(B_0)<\infty$ (c'est le cas ici car la série $\sum_{n\geq0}\mu(A_n)$ converge), et si la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion (i.e. $B_n\supset B_{n+1}$ pour tout $n\geq0$), alors $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}}B_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)(=0$ ici).
4) Remarquons avant tout que $\lambda(A_n)=\frac{1}{2^n}$, de sorte que $\sum_{n\geq0}\lambda(A_n)<\infty$. Les questions précédentes impliquent immédiatement que $\lambda(\limsup_{n\to\infty}A_n)=0$, ce qui signifie exactement que l'ensemble des $x\in[0,1]$ qui appartiennent à une infinité de A_n est de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 3 *Soit* $u_n=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{1+n^2+k^3}$. *1) Montrer que* $u_n<+\infty$. *2) Déterminer* $\lim_{n\to+\infty}u_n$. *3) Déterminer* $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

Corrigé 1) Remarquons que pour tout $n\geq0$, et $k\geq1$, on a $\dfrac{k}{1+n^2+k^3}\leq\dfrac{k}{1+k^3}\leq\dfrac{1}{k^2}$. (Si $k=0$, on majore par 0). La série $\sum_{k\geq1}\frac{1}{k^2}$ est convergente, donc la série u_n converge, pour tout $n\geq0$ fixé.
2) Considérons l'espace mesuré $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$, où μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Soit f_n la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(k)=\frac{k}{1+n^2+k^3}$. Elle est mesurable car toute fonction est mesurable sur $\mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Remarquons aussi que pour tout $n\geq0$ et $k\geq0$, $f_n(k)\leq\frac{1}{k^2}\mathbf{1}_{\mathbb{N}^*}(k)=f(k)$. La fonction f est intégrable sur $\mathbb{N}$ (cela signifie simplement que la série $\sum_{k\geq1}\frac{1}{k^2}$ converge. Donc le théorème de convergence dominée s'applique et $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}}f_n(k)d\mu(k)=\int_{\mathbb{N}}(\lim_{n\to\infty}f_n(k)d\mu(k)=\int_{\mathbb{N}}0\,d\mu(k)=0\,.$ Autrement dit $u_n\to0$ quand $n\to\infty$.
3) On utilise le théorème de Fubini-Tonelli pour les familles sommables, et on obtient $\sum_{n=0}^\infty f_n(k)=\sum_{k=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty f_n(k)$. Soit $n\leq x\leq n+1$. On a alors $\dfrac{k}{1+n^2+k^3}\geq\dfrac{k}{1+x^2+k^3}$ d'où $\dfrac{k}{1+n^2+k^3}\geq\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{k}{1+x^2+k^3}dx$. En sommant, on obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty\frac{k}{1+n^2+k^3}\geq\int_0^\infty\frac{k}{1+x^2+k^3}dx\,.$ Le changement de variable $y=\frac{x}{\sqrt{1+k^3}}$ donne $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty\frac{k}{1+n^2+k^3}\geq\frac{k}{\sqrt{1+k^3}}\int_0^\infty\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{\pi}{2}\frac{k}{\sqrt{1+k^3}}$. Comme $\frac{k}{\sqrt{1+k^3}}\sim\frac{1}{k^{1/2}}$ lorsque $k\to\infty$, la série $\sum_{k=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{k}{1+n^2+k^3}\geq\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k^{1/2}}=+\infty$ diverge aussi. Donc $\sum_{n=0}^\infty u_n=+\infty$.

Exercice 4 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit $f : X \to X$ une fonction mesurable. On dit que f préserve la mesure μ si pour tout ensemble mesurable A, $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$.*

Soit $T : [0,1] \to [0,1]$, $T(x) = 2x$ si $x \leq \frac{1}{2}$, $T(x) = -2x + 2$ sinon.

1) On munit $[0,1]$ de la tribu borélienne et de la masse de Dirac δ_0. T preserve-t-elle cette mesure ? 2) On munit $[0,1]$ de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ. T preserve-t-elle cette mesure ? 3) On revient au cas général. Soit $f^n = fofof....of$ n-fois. Montrer qur f^n est mesurable et que si f préserve la mesure alors f^n aussi. 4) Soit $g : [0,1] \to [0,1]$ bijection continue. Montrer que soit g est croissante, soit g est décroissante. 5) Déterminer toutes les bijections continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ qui préservent la mesure de Lebesgue.

Corrigé Commencez par dessiner le graphe (en forme de "tente") de T.
1) Rappelons que $\delta_0(A) = 1$ ssi $0 \in A$, et $\delta_0(A) = 0$ si $0 \notin A$. Par définition de T, $T(0) = 0$, de sorte que $O \in A$ ssi $0 \in T^{-1}(A)$. En particulier $\delta_0(A) = \delta_0(T^{-1}A)$. Donc T préserve la mesure δ_0.
2) On va montrer que pour tout I intervalle de $[0,1]$, $\lambda(T^{-1}I) = \lambda(I)$. On verra ensuite que la propriété s'étend à tous les boréliens de l'intervalle $[0,1]$.
* Premier cas: $I = [0, a[\subset [0,1]$. $T^{-1}(I) = \{x \in [0,1/2], 0 \leq 2x < a\} \cup \{x \in [1/2,1]; 0 \leq -2x+2 < a\} = [0, a/2[\cup]1-a/2, 1]$ (faire un dessin). En particulier, $\lambda(T^{-1}I) = a = \lambda(I)$.
* Deuxième cas: $I =]a, b[\subset [0,1]$. De la même manière, on montre que $T^{-1}(I) =]a/2, b/2[\cup]1-b/2, 1-a/2[$, de sorte que $\lambda(T^{-1}(I)) = \lambda(I) = b - a$.
* Troisième cas $I =]a, 1]$. Même raisonnement.
Pour montrer que la propriété est vraie pour tous les boréliens, on procède de la manière suivante. On considère la classe $\mathcal{C}$ des boréliens $B \in \mathcal{B}([0,1])$, tels que $\lambda(T^{-1}(B)) = \lambda(B)$. Cette classe d'ensembles contient tous les intervalles. En particulier elle contient $\emptyset$. Comme $T^{-1}(B^c) = (T^{-1}(B))^c$, elle est stable par passage au complémentaire. Comme $T^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} T^{-1} B_n$, elle est stable par union dénombrable disjointe. Un petit exercice montre que la classe $\mathcal{C}$ est également stable par union dénombrable quelconque. C'est donc une tribu, qui contient tous les intervalles ouverts de $[0,1]$. Elle contient donc la tribu borélienne $\mathcal{B}([0,1])$. Donc tout borélien vérifie $\lambda(T^{-1}(B)) = \lambda(B)$.
3) f^n est mesurable comme composée de fonctions mesurables. Si f préserve la mesure, une récurrence élémentaire sur $n \geq 1$ montre que pour tout borélien $B \in \mathcal{B}([0,1])$, $\lambda(f^{-n}(B)) = \lambda(B)$. (On utilise le fait que $f^{-n}(B) = f^{-1}(f^{-(n-1)}B)$.)
4) La fonction g est injective. On en déduit que la fonction $(x,y) \in \Delta \mapsto \frac{g(x)-g(y)}{x-y}$ ne s'annule pas sur $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2,\ 0 \leq x < y \leq 1\}$. Elle est donc de signe constant, ce qui implique que g est monotone.
5) Premier cas: supposons f croissante. Alors $f([0,x]) = [f(0), f(x)]$, et nécessairement $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Utilisons le fait qu'elle préserve la mesure de Lebesgue. Alors pour tout $x \in [0,1]$, on a $\lambda(f^{-1}([f(0), f(x)]) = \lambda([f(0), f(x)]) = \lambda([0,x]) = x$, d'où $f(x) = x$.
Deuxième cas : f décroissante. Alors la fonction $g = 1 - f$ est une bijection croissante, d'où $1 - f(x) = x$ soit $f(x) = 1 - x$ pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 5 *Soit $F(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2} dt$.*
1) Démontrer que $F(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. 2) Montrer que F est une fonction paire, décroissante sur $[0, +\infty[$. Quelle est la limite de $F(x)$ quand $x \to +\infty$? 3) Montrer que F est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0\}$. 4) F est-elle dérivable en 0 ?

Corrigé 1) On utilise le théorème de continuité sous le signe intégral.
* Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2}$ est intégrable(et en particulier mesurable, car continue).
* Pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2}$ est continue.
* Contrôle uniforme: pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$, et l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (une primitive est arctan, bornée).
Donc l'application F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2) La fonction F est évidemment paire. Si $0 \leq x \leq y$, on a bien sûr $e^{-t^2x^2} \geq e^{-t^2y^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où $F(x) \geq F(y) \geq 0$, donc F décroît sur $\mathbb{R}_+$. Quand $x \to +\infty$, $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2} = 0$. De plus la majoration uniforme en $x \geq 0$: $0 \leq \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ permet d'appliquer le théorème de convergence dominée, et d'obtenir $\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2} = 0$.
3) * Pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \frac{-2xt^2e^{-t^2x^2}}{1+t^2}$.
* Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{-2xt^2e^{-t^2x^2}}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
* Contrôle uniforme: la présence du terme $2xt^2$ empêche un contrôle uniforme sur $\mathbb{R}$. Sit $\varepsilon > 0$. Soit $F_\varepsilon = [\varepsilon, +\infty[$. Remarquons que l'application $u \in \mathbb{R}_+ \mapsto u^2e^{-u^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, par une constante M. Pour tout $x \in F_\varepsilon$, on a $\left|\frac{-2xt^2e^{-t^2x^2}}{1+t^2}\right| \leq \frac{M}{x}\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{M}{\varepsilon}\frac{1}{1+t^2}$. Le terme de droite est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de dérivation sous le signe intégral s'applique donc. On en déduit que F est dérivable sur F_ε. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, et F étant paire, F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
4) Remarque: comme F est paire, si F est dérivable en 0, alors $F'(0) = 0$. Calculons le taux d'accroissement autour de 0: $\dfrac{F(0)-F(x)}{x} = 2\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-t^2x^2}}{1+t^2}\frac{dt}{x} = 2\int_0^\infty \frac{1-e^{-s^2}}{x^2+s^2} ds$. Le lemme de Fatou implique $\liminf_{x\to 0+} \frac{F(0)-F(x)}{x} \geq 2\int_0^\infty \frac{1-e^{-s^2}}{s^2} ds > 0$. Donc la dérivée de F en 0 n'existe pas, puisque si elle existait, par parité, elle devrait être nulle.