Université de Picardie Jules Verne 2009-2010
UFR Sciences Licence S5 Intégration

Compléments pour remplacer un TD annulé pour cause de locomotive en feu...

Familles sommables
Exercice 10 feuille 2 Les familles suivantes sont-elles sommables :

$$\textbf{(a)}\ (x)_{x\in[0,1]} \quad \textbf{(b)}\ (x)_{x\in\mathbb{Q}} \quad \textbf{(c)}\ (\frac{1}{x^2})_{x\in\mathbb{Q}_+^*} \quad \textbf{(d)}\ (x^n)_{n\in\mathbb{Z}} \quad \textbf{(e)}\ \left(\frac{1}{a^p+b^q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \quad \text{pour } (a,b)\in]1,+\infty|$$

Corrigé. **a)** Rappelons que par définition, $\sum_{x\in[0,1]}|x| = \sup_{A\subset[0,1],A \text{ fini}}\sum_{x\in A}|x|$. En particulier, si $A_N = \{1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{N}\}$ pour un certain $N\geq 1$, alors $\sum_{x\in A}|x| = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$. En prenant le sup sur toutes les parties A_N, $N\geq 1$, on obtient

$$\sup_{A\subset[0,1],A \text{ fini}}\sum_{x\in A}|x| \geq \sup_{A_N\subset[0,1]}\sum_{k=1}^N\frac{1}{k} = +\infty\,.$$

En particulier, la famille $(x)_{x\in[0,1]}$ n'est pas sommable. Comme mentionné en TD, il est peut-être plus naturel de considérer des ensembles A_N de nombres ¡¡ proches de 1 ¿¿, par exemple $A_N = \{1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3},\dots,1-\frac{1}{N+1}\}$. Alors $\sum_{x\in A_N}|x| \geq \frac{1}{2}\#A_N = \frac{N}{2}$.
b) Exactement le même raisonnement, et le même résultat.
c) En prenant par exemple $A_N = \{\frac{1}{k},\, 1\leq k\leq n\}$, on obtient $\sum_{x\in A_N}\frac{1}{x^2} = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \geq N$. emOn obtient encore que la famille $(\frac{1}{x^2})_{x\in\mathbb{Q}_+^*}$ n'est pas sommable.
d) J'ai volontairement refusé de corriger cette question en TD, il s'agit d'un exercice de 1ère S. Si $|x|<1$, alors... et si $|x|\geq 1$, alors...
Remarquez ici que l'indice de sommation est n et pas x. On est dans le cas - presque- très classique d'une série géométrique indexée par $\mathbb{Z}$.

e) Le théorème de Fubini-Tonelli assure que pour calculer la somme, je peux sommer d'abord en q, puis en p, ou l'inverse. On vérifie aisément que, comme $b>1$, et $a^p\geq 1\geq 0$, on a $0\leq\frac{1}{a^p+b^q}\leq\frac{1}{b^q}$. $\sum_{q=1}^\infty\frac{1}{a^p+b^q}\leq\sum_{q=1}^\infty\frac{1}{b^q} = \frac{1}{1-b} < \infty$. Malheureusement, cette majoration est trop grossière pour permettre une deuxième sommation.
Remarquons que si on avait $\frac{1}{a^pb^q}$ à la place de $\frac{1}{a^p+b^q}$, le $\frac{1}{a^p}$ se mettrait en facteur, et on aurait $\sum_{p=1}^\infty\sum_{q=1}^\infty\frac{1}{a^pb^q} = \frac{1}{1-a}\frac{1}{1-b}$.
À défaut, on se rappelle de l'inégalité classique $x^2+y^2\geq 2xy$ pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. En prenant $x=\sqrt{a}^p$ et $y=\sqrt{b}^q$, on obtient $a^p+b^q\geq 2\sqrt{a}^p\sqrt{b}^q$. Notons aussi que $a>1$ et $b>1$ implique $\sqrt{a}>1$ et $\sqrt{b}>1$ évidemment.
On en déduit que

$$\sum_{p=1}^\infty\sum_{q=1}^\infty\frac{1}{a^p+b^q}\leq\sum_{p=1}^\infty\sum_{q=1}^\infty\frac{1}{\sqrt{a}^p\sqrt{b}^q} = \frac{1}{1-\sqrt{a}}\frac{1}{1-\sqrt{b}} < \infty\,.$$

La famille est donc sommable.

Exercice 11 feuille 2 Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Si cette famille est sommable, montrer que $\{i\in I, u_i\neq 0\}$ est au plus dénombrable. Montrer que le résultat reste vrai pour une famille de nombres réels de signe quelconque.

Corrigé Introduisons l'ensemble $I_n = \{i\in I, |u_i|\geq\frac{1}{n}\}$. Notons que $\{i\in I, u_i\neq 0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}^*}I_n$.
Soit $J\subset I_n$ une partie finie. Alors $\sum_{i\in J}|u_i|\geq\frac{1}{n}\#J$. Comme la famille est supposée sommable, on a aussi $\sum_{i\in J}|u_i|\leq\sum_{i\in I}|u_i|<\infty$. Appelons $S<\infty$ cette dernière quantité. Donc $\#J/n<S$. Autrement dit, toutes les parties finies de I_n sont de cardinal au plus nS. Ceci implique aisément que I_n est fini.
La relation $\{i\in I, u_i\neq 0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}^*}I_n$ implique que $\{i\in I, u_i\neq 0\}$ est une union dénombrable d'ensembles finis, donc au plus dénombrable.

Intégrale de Riemann
Exercice 12 feuille 2 Si $n\geq 1$, on pose $S_n = \sqrt{1}+\dots+\sqrt{n}$. Montrer que $S_n\sim\frac{2}{3}n\sqrt{n}$.

Corrigé On étudie la somme de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}$. La fonction $\sqrt{}$ étant continue sur $[0,1]$, la somme ci-dessus converge vers $\int_0^1\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$.
Cela donne immédiatement l'équivalent voulu.

Exercice 16feuille 2 [Lemme de Riemann-Lebesgue] Soit $I_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)dt$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$,
(a) lorsque f est en escalier.
(b) Lorsque f est continue par morceaux.

Corrigé Supposons d'abord $f = 1_{[c,d]}$. Soit $[\alpha, \beta] = [a, b] \cap [c, d]$. Alors $I_n = \int_\alpha^\beta \sin nt\, dt = \frac{\cos n\alpha - \cos n\beta}{n}$. Le numérateur étant borné, cette quantité tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Si $f = \sum_{i=1}^p \alpha_i 1_{[c_i,d_i]}$, par linéarité de l'intégrale, le même résultat est vrai.
b) Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors elle est limite uniforme de fonctions en escalier définies sur $[a, b]$. Soit $(f_k)_{k\geq 0}$ une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ convergeant uniformément vers f.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe K tel que pour tout $k \geq K$, $\|f - f_k\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon$. Et $\int_a^b f(t) \sin ntdt = \int_a^b (f(t) - f_k(t)) \sin ntdt + \int_a^b f_k(t) \sin nt\, dt$. Pour $k = K$, la première intégrale est majorée en valeur absolue par $(b - a)\|f - f_k\|_\infty \leq (b - a)\varepsilon$. A $k = K$ fixé, la deuxième intégrale tend vers 0 quand $n \to \infty$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tq pour tout $n \geq N$, la seconde intégrale est, en valeur absolue, inférieure à ε.

Finalement pour tout ε, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq pour tout $n \geq N$, $\left|\int_a^b f(t) \sin nt\, dt\right| \leq \varepsilon(b-a)+\varepsilon$. C'est le résultat voulu.

Exercice 18 feuille 2 m Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $]0, 1]$ par $f_n(x) = n.\mathbf{1}_{]0,\frac{1}{n}[}$.
Comparer $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$.

Un dessin du graphe de f_n, et le calcul de l'aire d'un rectangle donnent immédiatement $\int_0^1 f_n(t)dt = 1$ pour tout $n \geq 1$, d'où bien sûr $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 1$. D'autre part, faites le dessin du graphe de f_1, f_2, f_3, ... Pour $t = 0$, pour tout $n \geq 1$, $f_n(0) = 0 \to 0$ quand $n \to \infty$. Si $0 < t \leq 1$, et si n est assez grand, $n > \frac{1}{t}$, alors $f_n(t) = 0$. Autrement dit, dans tous les cas, $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$. On en déduit que $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = 0$.

En particulier (cf L2), la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f. Nous verrons par la suite de nombreux résultats permettant d'intervertir limite et intégrale.