Devoir à préparer pour le 26 octobre 2009 si vous voulez la correction avant les partiels

Partiel du 6 novembre 2008
3 heures

Documents et calculatrices interdits. Le barème tiendra compte de la longueur et de la difficulté de l'énoncé. L'ensemble des boréliens d'un intervalle de $\mathbb{R}$ sera noté $\mathcal{B}$ et la mesure de Lebesgue sera notée λ. On utilisera aussi la convention de notation suivante

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda,$$

qui est consistante avec le fait qu'une fonction Riemann intégrable sur un intervalle compact est Lebesgue intégrable sur ce même intervalle.

Exercice 1 *Dans cet exercice, on considère* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. *Soit la suite de fonctions*

$$u_n(x) = (1 + \frac{x}{2n})^n e^{-x} \chi_{\mathbb{R}^+}(x);$$

où $\chi_{\mathbb{R}^+}$ *désigne la fonction caractéristique de l'ensemble des réels positifs.*
1) Justifier le fait que u_n *soit mesurable.*
2) Démontrer que $u_n(x)$ *converge simplement vers la fonction* $u(x) = e^{-\frac{x}{2}} \chi_{\mathbb{R}^+}(x)$.
3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(x)dx$.
4) Soit la fonction mesurable $v_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n e^{-\frac{x}{2}} \chi_{\mathbb{R}^+}(x)$; *déterminer* $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} v_n(x)dx$.

Exercice 2 *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. Pour une famille dénombrable d'ensembles mesurables* A_n, *on définit*

$$\overline{\lim} A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} (\cup_{k\geq n} A_k).$$

1) Soit $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$. *Montrer que* B_n *est mesurable. En déduire que* $\overline{\lim} A_n$ *est mesurable.*
On suppose dans la suite de l'exercice que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$.
2) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = 0$.
3) Montrer que $\mu(\overline{\lim} A_n) = 0$.
4) Dans cet exemple $(X, \mathcal{A}, \mu) = ([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$. *Pour un réel* y, *on définit la mantisse de* y *comme étant* $M(y) = y - E(y)$, *où* $E(y)$ *est la partie entière de* y. M *prend alors ses valeurs dans* $[0,1[$. *Soit* $A_n = [\frac{M(\log(n+1))}{2^n}, \frac{M(\log(n+1))+1}{2^n}]$. *Montrer que l'ensemble* $\{x \in [0,1]; x$ *appartient à une infinité de* $A_n\}$ *est négligeable, c'est à dire de mesure nulle.*

Exercice 3 *Soit* $u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{1+n^2+k^3}$.
1) Montrer que $u_n < +\infty$.
2) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
3) Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 4 *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré, tel que* $\mu(X) < +\infty$. *Soit* $f : X \to X$ *une fonction mesurable. On dit que* f *préserve la mesure* μ *si pour tout ensemble mesurable* A, $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$.

Soit $T : [0,1] \to [0,1]$, $T(x) = 2x$ *si* $x \leq \frac{1}{2}$, $T(x) = -2x + 2$ *sinon.*
1) On munit $[0,1]$ *de la tribu borélienne et de la masse de Dirac* δ_0. T *preserve-t-elle cette mesure ?*
2) On munit $[0,1]$ *de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue* λ. T *preserve-t-elle cette mesure ?*
3) On revient au cas général. Soit $f^n = fofof....of$ *n-fois. Montrer qur* f^n *est mesurable et que si* f *préserve la mesure alors* f^n *aussi.*
4) Soit $g : [0,1] \to [0,1]$ *bijection continue. Montrer que soit* g *est croissante, soit* g *est décroissante.*
5) Déterminer toutes les bijections continues de $[0,1]$ *dans* $[0,1]$ *qui préservent la mesure de Lebesgue.*

Exercice 5 *Soit* $F(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2} dt$.
1) Démontrer que $F(x)$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$.
2) Montrer que F *est une fonction paire, décroissante sur* $[0, +\infty[$. *Quelle est la limite de* $F(x)$ *quand* $x \to +\infty$ *?*
3) Montrer que F *est une fonction de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R} - \{0\}$.
4) F *est-elle dérivable en* 0 *?*