

## LICENCE L3 2008-2009/INTÉGRATION

Examen du Jeudi 3 septembre 2009

4 heures

Documents et calculatrices interdits. Le barème tiendra compte de la longueur et de la difficulté de l'énoncé. L'ensemble des boréliens d'un intervalle de  $\mathbb{R}^n$  sera noté  $\mathcal{B}$  et la mesure de Lebesgue sera notée  $\lambda$  ou  $dx$ .

### 1. EXERCICE 1

On considère la fonction  $2\pi$  périodique définie par  $f(x) = 1$  si  $x \in ]0, \pi[$  et  $f$  est impaire.

- 1) Calculer  $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx$  pour  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ .
- 2) En déduire  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .
- 3) En déduire la valeur de  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ .
- 4) Calculer  $\hat{f}(2k+1) + \hat{f}(-2k-1)$ . En déduire la limite dans  $L^2(-\pi, \pi)$  de  $S_n(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ .
- 5) La suite  $S_n(f)$  converge-t-elle uniformément sur  $[-\pi, \pi]$  ?

### 2. EXERCICE 2

Soit  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx^2)}{1+t^2} dt$ .

- 1) Démontrer que  $F$  est une fonction continue, bornée sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Démontrer que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R} - \{0\}$ .
- 3)  $F$  est-elle dérivable en 0 ?
- 4) Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ .
- 5) Déterminer un équivalent de  $F$  en  $+\infty$ .

## 3. EXERCICE 3

On considère  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré tel que  $\mu(X) = 1$ .

On dit qu'une suite de fonction mesurables  $f_n$  *P-converge* vers  $f$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\{x \in X; |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

On dit que la suite de fonction  $f_n$  *converge mollement* vers  $f$  si pour toute fonction  $g$  dans  $L^\infty(X)$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X (f_n(x) - f(x))g(x)d\mu(x) = 0.$$

- 1) Démontrer que si  $f_n$  tend vers  $f$  dans  $L^1(X)$  alors  $f_n$  P-converge vers  $f$ .
- 2) Démontrer que si  $f_n$  P-converge vers  $f$  alors  $f_n$  converge mollement vers  $f$ .
- 3) On choisit  $X = [0, 1]$  muni de la mesure de Lebesgue. Etudier la convergence éventuelle (dans  $L^1(X)$ , P-convergence, convergence molle) de la suite de fonctions  $u_n(t) = \sin(n\pi t)$ .

## 4. EXERCICE 4

Soit pour  $t \geq 0$  et  $u$  une fonction continue et bornée sur  $[0, +\infty[$ , la suite de fonctions

$$T_N(u)(t) = \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(tN)^m}{m!} u\left(\frac{m}{N}\right) \right) e^{-tN}.$$

- 1) Démontrer que  $T_N(u)$  est une fonction bornée sur  $[0, +\infty[$ .
- 2) Démontrer que  $T_N(u)$  est une fonction continue sur  $[0, +\infty[$ .
- 3) soit  $X_k : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^k$ . Calculer  $T_N(X_0), T_N(X_1), T_N(X_2)$ .
- 4) Démontrer que

$$|T_N(u)(t) - u(t)| \leq \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(tN)^m}{m!} (u\left(\frac{m}{N}\right) - u(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}} e^{-tN/2}.$$

5) On suppose de plus que  $u$  est une fonction lipschitzienne sur  $[0, \infty[$ , i.e qu'il existe  $L$  tel que  $|u(x) - u(y)| \leq L|x - y|$ , pour tout  $x, y$ . Montrer que  $T_N(u)$  converge uniformément sur tout compact vers  $u$ .

### 5. EXERCICE 5

Pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on désigne par  $r = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ . On munit  $\mathbb{R}^n$  de la mesure de Lebesgue.

- 1) Montrer que  $F(x) = \frac{1}{(1+r)(1+|\log r|)^2}$  est mesurable.
- 2) Montrer que  $F$  est dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si  $p \geq n$ .