Quelques corrigés de la feuille 7

Je suis en grève ce jeudi 20 novembre. Voici quelques corrigés. Il y a surement des fautes de frappe. N'hésitez pas à m'écrire un mél pour me poser des questions `barbara.schapira@u-picardie.fr`. Quant aux motifs me poussant à la grève, vous trouverez quelques liens intéressants sur `http://www.mathinfo.u-picardie.fr/schapira/`

Je vous rappelle que nous avons trois TD la semaine prochaine, lundi, mercredi matin, et jeudi matin. Nous travaillerons sur la feuille 7 lundi, puis sur la feuille 8 mercredi et jeudi.

Exo 5 feuille 7
• f_1 est positive et borélienne comme produit d'indicatrices d'intervalles. D'après le théorème de Fubini-Tonelli, $\int_{\mathbb{R}^2} f_1(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}} 1dy = +\infty$. Donc f_1 n'est pas intégrable.
• $f_2(x,y) = 1$ (est mesurable positive mais) n'est pas intégrable, par ex $\int_{\mathbb{R}} f_2(x,y)dx = +\infty$.
• $f_3(x,y) = x^y$. Sur $]0,1[^2$, f_3 est continue positive. $\int_{]0,1[} f_3(x,y)dx = [\frac{x^{y+1}}{y+1}]_0^1 = \frac{1}{y+1}$ et $\int_0^1 \frac{1}{y+1}dy = \ln(2) < \infty$. Donc f_3 est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $]0,1[^2$.
• f_4 est contiue sur $\mathbb{R}^2$ donc mesurable. Par le théorème de changmeent de variables, on observe que $\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(xy)}{y}\right| dy = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du = +\infty$. DOnc f_4 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^2$ pour la mesure de Lebesgue.
• f_5 est continue sur $]0,+\infty[^2$ donc mesurable. On calcule $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}dx = \frac{1}{(\alpha-1)(1+y)^{1-\alpha}}$ ssi $\alpha > 1$ et $= +\infty$ sinon. Le même calcul (on intègre une deuxième fois, par rapport à y) donne $\int_0^\infty \int_0^\infty f_5(x,y)dxdy = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$ si $\alpha > 2$ et $= +\infty$ sinon.
• f_6 est continue donc mesurable sur $]0,1[^3$. De plus, $\int_0^1 f_6(x,y,z)dx = \ln(1+y^2+z^3) - ln(y^2+z^3)$. L'application $(y,z) \mapsto \ln(1+y^2+z^3)$ est bornée entre 0 et $ln(3)$, donc intégrable sur $]0,1[^2$. Ecrivons $\ln(y^2) \le ln(y^2+z^3) \le \ln(1+y^2)$, d'où $|\ln(y^2+z^3)| \le \max(|\ln(y^2)|, \ln(1+y^2)$ L'application $y \mapsto \ln(y^2) = 2\ln(y)$ est intégrable sur $]0,1[$ de primitive $y \mapsto y(\ln y - 1)$ et d'intégrale -1. Son intégrale par rapport à z sur $]0,1[$ vaut donc encore -1. Le terme $\ln(1+y^2)$ est borné entre 0 et $\ln(2)$ et donc intégrable sur $]0,1[^2$ pour la mesure de Lebesgue.
• f_7 est continue donc mesurable sur $]0,1[^3$ et positive. On remarque que $\frac{1}{1-xyz} = \sum_{n=0}^\infty (xyz)^n$. Par le théorème de convergence monotone, on sait que $\int_{]0,1[^3} f_7(x,y,z)dxdydz = \sum_{n=0}^\infty \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (xyz)^n dxdydz = \sum_{n=0}^\infty (\int_0^1 x^n dx)^3 = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^3}$. C'est une série convergente, donc f_7 est intégrable.
• f_8 est continue donc mesurable et positive. De plus, par Fubini Tonelli, $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{yz}{x}dydzdx = (\int_0^1 ydy)(\int_0^1 zdz)(\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{2} \times (+\infty)$. Donc elle n'est pas intégrable.

Exo 6 feuille 7 L'application $f : (x,y) \mapsto e^{-y}\sin(2xy)$ est continue donc mesurable sur $[0,1] \times \mathbb{R}_+$. De plus, $|e^{-y}\sin(2xy)| \le e^{-y}$. $\int_{[0,1]} e^{-y}dx = e^{-y}$ et $\int_{\mathbb{R}_+}\int_{[0,1]} e^{-y}dxdy = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-y}dy = 1$, donc f est intégrable.
Calculons maintenant l'intégrale de f. D'après le théorème de Fubini, on peut intégrer d'abord par rapport à x puis y. $\int_0^1 \sin(2xy)dx = \frac{\sin^2 y}{y}$, donc $\int_{[0,1]\times\mathbb{R}_+} f(x,y)d\lambda_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin^2 y}{y}dy$. D'autre part, à l'aide de deux intégrations par parties successives, on trouve $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-y}\sin(2xy)dy = \frac{2x}{1+4x^2}$, puis $\int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2}dx = \frac{1}{4}[\ln(1+4x^2)]_0^1 = \frac{\ln 5}{4}$.

Exo 7 feuile 7 Remarquez que la fonction f est continue sur $[0,1]^2 \setminus \{(0,0)\}$, donc mesurable. Par ailleurs, elle est symétrique en x et y $f(x,y) = f(y,x)$. Donc si les intégrales doubles de la question a) ont un sens, elles sont égales. À y fixé, la fonction $x \mapsto \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ est continue sur $[0,1]$ et impaire. On en déduit d'une part qu'elle est intégrable sur $[-1,1]$,et d'autre part que $\int_{[-1,0[} f(x,y)dx = -\int_{]0,1]} f(x,y)dx$ par changement de variables. Comme le singleton $\{0\}$ est de mesure nulle, on en déduit $\int_{[-1,1]} f(x,y)dx = 0$. La fonction $y \mapsto 0$ est intégrable sur $[-1,1]$ d'où $\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(x,y)dxdy = 0$. L'intégrale double de droite est égale à celle de gauche par symétrie de f; donc nulle aussi.
b) Calculons $\int_{[0,1]} f(x,y)dx = \int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dx = [-\frac{y}{2(x^2+y^2)}]_0^1 = \frac{1}{2y(1+y^2)}$. La fonction $y \mapsto \frac{1}{2y(1+y^2)}$ est équivalente à $\frac{1}{2y}$- donc non intégrable- au voisinage de 0.Donc l'intégrale double $\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)dxdy$ vaut $+\infty$.

Exo 9 feuille 7 La première question est simplement une application du théorème de Fubini Tonelli sur le produit de $(X,\mathcal{T},\mu)$ par $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\nu)$ où ν est la mesure de comptage, pour la fonction mesurable positive $f : \mathbb{N}\times X \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(n,x) = f_n(x)$. Notons également que l'interversion $\sum - \int$ est ici un corollaire de Beppo Levi.
Application: Remarquons d'abord que f est mesurable comme limite simple de fonctions continues. Appliquons l'égalité précédente à $\varphi_n(x) = \frac{|\sin(nx)|e^{-n|x|}}{n^3+x^2}$. Remarquons que $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)dx \le \frac{1}{n^3}\int_{\mathbb{R}} e^{-n|x|}dx = \frac{2}{n^4}$. La série $\sum_{n\ge1}\frac{2}{n^4}$ converge, donc $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty$.
2) On va appliquer le théorème de convergence dominée. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(nx)e^{-n|x|}}{n^3+x^2} = 0$. Considérons une suite $x_k \to \infty$. On peut supposer $x_k \ge 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. $\left|\frac{\sin(nx)e^{-n|x|}}{n^3+x^2}\right| \le e^{-n}n^3$ qui est le terme général d'une série convergente. Le

théorème de convergence dominée implique alors $\lim_{x_k\to\infty} f(x_k) = \sum_{n\geq 1} \lim_{x_k\to\infty} f_n(x_k) = 0$. Ceci étant vrai pour toute suite $x_k \to \infty$, on en déduit (savez-vous le faire?) que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.