

Corrigé du Devoir 2

Exercice 1 (Exo 1 feuille 3) Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire entière, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X = n) > 0$. Si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$. Réciproquement, si $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$ pour tout $n \geq 1$, alors une récurrence immédiate donne $p_n = \frac{\lambda^n}{n!} p_0$ pour tout $n \geq 1$, et la condition $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$ implique $p_0 = e^{-\lambda}$.

Exercice 2 (exo 5 feuille 3) D'après une propriété vue en cours, la tribu $\sigma(X)$ est l'ensemble des $X^{-1}(B)$, avec B un borélien de $[0, 1]$. Comme X est constante égale à 1 sur l'intervalle $[1/2, 1]$, la valeur 1 va jouer un rôle, suivant que $1 \in B$ ou pas.

Plus précisément, si B est un borélien inclus dans $[0, 1[$, alors $X^{-1}(B) = \frac{B}{2} \in \mathcal{F}([0, 1/2[)$. Si $1 \in B$, alors $X^{-1}(B) = \frac{B}{2} \cup [1/2, 1]$. Ceci suffit à répondre à la question : la tribu engendrée par X est l'ensemble des boréliens d'une des deux formes ci-dessus: soit un borélien de $\mathcal{F}([0, 1/2[)$, soit un borélien de $\mathcal{F}([0, 1/2]$ contenant $1/2$ auquel on a rajouté l'intervalle $[1/2, 1]$.

Autrement dit, la tribu $\sigma(X)$ est l'union de la tribu $\mathcal{F}([0, 1/2[)$ et des ensembles de la forme $B \cup [1/2, 1]$, avec $1/2 \in B$, et $B \in \mathcal{F}$.

Exercice 3 (exo 6 feuille 3) Soit $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ l'espace des états, D_1 et D_2 les résultats des deux lancers, $X = \max(D_1, D_2)$ et $Y = \min(D_1, D_2)$. Remarquons que $X \geq Y$, ce qui laisse penser que X et Y ne sont pas indépendantes, et qu'on démontrera ci-dessous. Donner la loi de (X, Y) c'est donner les valeurs $P((X, Y) = (i, j))$ pour tous les couples $(i, j) \in \Omega$. Si $i < j$, $P((X, Y) = (i, j)) = 0$ car $X \geq Y$. Si $i = j$, $P((X, Y) = (i, i)) = P((D_1 = D_2 = i) = P(D_1 = i \text{ et } D_2 = i) = P(D_1 = i)P(D_2 = i)$ car les deux lancers sont indépendants. Donc $P((X, Y) = (i, i)) = \frac{1}{36}$. Si $i > j$, $P((X, Y) = (i, j)) = P((D_1 = i \text{ et } D_2 = j) \text{ ou } (D_1 = j \text{ et } D_2 = i)) = P(D_1 = i \text{ et } D_2 = j) + P(D_1 = j \text{ et } D_2 = i) = \frac{1}{18}$.

X et Y ne sont pas indépendantes, car par exemple $P(X = 1 \text{ et } Y = 2) = 0$ alors que $P(X = 1)P(Y = 2) = \frac{1}{36} \cdot (\sum_{i=2}^6 P(i, 2)) = \frac{1}{144} \neq 0$.

Exercice 4 (exo 8 feuille 3) Soit $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ l'espace des états. X suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$. Donc $P(X = i) = \frac{1}{6}$ pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$. Si $X = i$, Y suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, i\}$. Autrement dit, $P(Y = k | X = i) = \frac{1}{i}$ pour $k \leq i$. Donc $P((X, Y) = (i, k)) = \frac{1}{6i}$. Donc $P(Y = k) = \sum_{i=k}^6 \frac{1}{6i}$. Un calcul donne $P(Y = 1) = \frac{147}{360}$, $P(Y = 2) = \frac{87}{360}$, $P(Y = 3) = \frac{57}{360}$, $P(Y = 4) = \frac{37}{360}$, $P(Y = 5) = \frac{22}{360}$, $P(Y = 6) = \frac{1}{36}$.

Exercice 5 (exo 9 feuille 3) On a $f(x, y) = e^{-(x+y)} 1_{\mathbb{R}_+}(x) 1_{\mathbb{R}_+}(y)$. On en déduit que $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = e^{-x} 1_{\mathbb{R}_+}(x)$. De même, en échangeant les rôles de x et y , on obtient $f_Y(y) = e^{-y} 1_{\mathbb{R}_+}(y)$. Donc $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Donc (voir cours) X et Y sont indépendantes.

Exercice 6 (exo 12 feuille 3) C'est un exo de calcul (à faire avec méthode). $P(\min(X, Y) \leq i) = 1 - P(\min(X, Y) > i)$ et $P(\min(X, Y) > i) = P(X \geq i + 1 \text{ et } Y \geq i + 1) = P(X \geq i + 1)P(Y \geq i + 1) = \dots = \frac{1}{4^i}$. Donc $P(\min(X, Y) \leq i) = 1 - 1/4^i$.

$$P(X = Y) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i \text{ et } Y = i) = \dots = \frac{1}{3}.$$

$$P(Y > X) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y > i | X = i) P(X = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y > i) P(X = i) = \dots = 1/3.$$

$$\text{De même, } P(Y > kX) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y > ki) P(X = i) = \dots = \frac{2}{2^{k+1} - 1}$$