

Corrigé du Devoir 4 (partiel mars 2003)

Exercice I.

I.1. Prenons par exemple $a_n = 1 - (-1)^n$, pour laquelle on a $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Réponse à la question subsidiaire: il existe des suites $\{b_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ telles que pour tout nombre rationnel $r \in \mathbb{R}$, il existe une sous-suite b_{n_k} tendant vers r . Par exemple, soit $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$. La suite suivante possède la propriété désirée:

$$r_1; r_1, r_2; r_1, r_2, r_3; r_1, r_2, r_3, r_4; r_1, r_2, r_3, r_4, r_5; \dots$$

Ou bien $\{r_n\}_{n \geq 1}$ fait aussi l'affaire car les nombres rationnels sont denses dans \mathbb{R} .

I.2. Prenons par exemple $A_{2n} = \emptyset$ et $A_{2n+1} = [0, 1]$ pour laquelle on a $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \emptyset$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 1]$.

I.3. On a $\text{Card } \mathbb{N} = \text{Card } 2\mathbb{N}$ car $n \mapsto 2n$ est une bijection de \mathbb{N} sur $2\mathbb{N}$. On a $\text{Card }]0, 1[= \text{Card } \mathbb{R}$ car $x \mapsto \tan \pi(x - 1/2)$ est une bijection de $]0, 1[$ sur \mathbb{R} .

I.4. La tribu engendrée \mathcal{A} est la famille des réunions de $A = \{a, b\}, B = \{c\}, C = \{d\}$:

$$\{\emptyset; A, B, C; A \cup B, A \cup C, B \cup C; X\}$$

i.e. $\{\emptyset; \{a, b\}, \{c\}, \{d\}; \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{c, d\}; X\}$. Le singleton $\{a\}$ n'est pas dans la tribu \mathcal{A} . Son indicatrice $1_{\{a\}}$ est donc une fonction qui n'est pas \mathcal{A} -mesurable.

I.5. Remarquons que f est mesurable par recollement. On voit d'abord que

$$\int_0^1 |g(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/(n+1)}^{1/n} n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty,$$

ce qui montre la non-intégrabilité de f . Le fait que f soit localement intégrable est évident car la restriction de f sur un intervalle compact de $]0, 1[$ est étagée. Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, soit N l'entier tel que $1/(N+1) \leq \varepsilon \leq 1/N$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 g(x) dx &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_{1/(n+1)}^{1/n} (-1)^{n+1} n dx + \int_{\varepsilon}^{1/N} (-1)^{N+1} N dx \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + (-1)^{N+1} (1 - N\varepsilon) \end{aligned}$$

On en déduit que la limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 g(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ existe car $\varepsilon N \rightarrow 1$ et la série alternée ci-dessus est convergente, ce qui montre que l'intégrale impropre de f est bien définie.

I.6. Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ quelle que soit la suite $x_n \rightarrow b$. Supposons que $\lim_{x \rightarrow b} f(x) \neq L$. Alors il existe un $\varepsilon_0 > 0$ ayant la propriété suivante:

$$\forall \delta > 0, \exists x = x(\delta) \text{ tel que } |x(\delta) - b| < \delta, \quad |f(x(\delta)) - L| > \varepsilon_0.$$

Posons $x_n = x(1/n)$. On $x_n \rightarrow b$ car $|x_n - b| \leq 1/n$. Or $|f(x_n) - L| > \varepsilon_0$, ce qui contredit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$. On montre ainsi que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ implique $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$. La réciproque est évidente par la définition.

Appliquons le résultat à $f(T) = \int_{[0, T]} g(x) d\lambda(x)$ et utilisons le théorème de convergence dominée pour obtenir la limite voulue

$$\int_{[0, \infty[} g(x) d\lambda(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0, T]} g(x) d\lambda(x).$$

◇ ◇ ◇

Exercice II.

II.1. Observons que $\{x : h(x) = \infty\} = \bigcup_{n \geq 1} \{x : h(x) > n\}$. Par l'inégalité de Markov on a

$$\lambda\{x : h(x) = \infty\} \leq \inf_{n \geq 1} \lambda\{x : h(x) > n\} \leq \inf_{n \geq 1} \frac{\int h(x) d\lambda(x)}{n} = 0.$$

II.2. Comme f est continue, f est à la fois Riemann intégrable et Lebesgue intégrable sur tout intervalle compact et on a

$$\int_{[-n, n]} f(\gamma x) d\lambda(x) = \int_{-n}^n f(\gamma x) dx, \quad \frac{1}{\gamma} \int_{[-\gamma n, \gamma n]} f(x) d\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\gamma n}^{\gamma n} f(x) dx.$$

Or par le changement de variable $y = \gamma x$ on a $\int_{-n}^n f(\gamma x) dx = \frac{1}{\gamma} \int_{-\gamma n}^{\gamma n} f(x) dx$, d'où

$$\int_{[-n, n]} f(\gamma x) d\lambda(x) = \frac{1}{\gamma} \int_{[-\gamma n, \gamma n]} f(x) d\lambda(x).$$

On passe alors à la limite pour obtenir le résultat final en utilisant le théorème de convergence dominée.

II.3. On va appliquer **II. 1.** à $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f(\gamma_n x)|$. D'après le théorème de Beppo-Levi, on a

$$\int h(x) d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f(\gamma_n x)| d\lambda(x).$$

D'après **II.2.** et l'hypothèse on a $\int h(x) d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} < \infty$. Alors **II. 1** implique $h(x) < \infty$ p.p., ce qu'on veut démontrer.

II.4. Les fonctions $g_n(x) = (1 - n^2|x - n^2|)1_{[n^2 - n^2, n^2 + n^2]}(x)$ sont continues et de supports disjoints deux à deux (on peut tracer leurs graphes). Donc g est continue. Si on intègre terme par terme, on a

$$\int g(x) d\lambda(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int g_n(x) d\lambda(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int g_n(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-2} < \infty$$

d'où l'intégrabilité de g . On a $\lim_n g(n^2) = 1 \neq 0$ car $g_n(n^2) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ ◇ ◇

Exercice III.

III.1. La fonction $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ se prolonge continuellement en $x = 0$. En tant que fonction continue, f est localement intégrable sur $[0, \infty[$. En particulier, elle est intégrable sur $[0, 1]$. D'autre part, il existe une constante $c > 0$ telle que $f(x) \leq \frac{c}{x^2}$ sur $]1, \infty[$, d'où l'intégrabilité de f sur $]1, \infty[$. En combinant ces résultats, on obtient l'intégrabilité de f sur $[0, \infty[$. Comme $\frac{|\sin(ax)|}{e^x - 1} \leq |a|f(x)$ et que f est intégrable, $F(a)$ est bien définie.

III.2. Ce point est une conséquence de

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}.$$

III.3. D'après **I.6.** on a $\int_0^{\infty} e^{-nx} \sin ax dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-nx} \sin ax dx$, où l'intégrale de droite peut être comprise comme une intégrale de Riemann. Intégrons par parties,

$$\begin{aligned} I := \int_0^{\infty} e^{-nx} \sin ax dx &= \left[-\frac{\cos ax}{a} \right]_{x=0}^{x=\infty} - \frac{n}{a} \int_0^{\infty} e^{-nx} \cos ax dx \\ &= \frac{1}{a} - \frac{n}{a} \int_0^{\infty} e^{-nx} \cos ax dx \\ \int_0^{\infty} e^{-nx} \cos ax dx &= \left[\frac{\sin ax}{a} \right]_{x=0}^{x=\infty} + \frac{n}{a} \int_0^{\infty} e^{-nx} \sin ax dx \\ &= \frac{n}{a} \int_0^{\infty} e^{-nx} \sin ax dx = \frac{n}{a} I. \end{aligned}$$

Donc $I = \frac{1}{a} - \frac{n}{a^2} I$, d'où $I = \frac{a}{x^2 + a^2}$. Alors, d'après **III.2.** on a

$$F(a) = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin ax dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} \sin ax dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{x^2 + a^2}.$$

Ici, pour la deuxième égalité (intégration terme par terme), on remarque que

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |e^{-nx} \sin ax| dx \leq \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx < \infty.$$

III.4. D'après la définition, on a

$$F'(0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{F(a) - F(0)}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{a(e^x - 1)} dx.$$

On peut prendre la limite sous le signe d'intégration en utilisant le théorème de convergence dominée car

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{a} = x, \quad \left| \frac{\sin(ax)}{a(e^x - 1)} \right| \leq \frac{x}{e^x - 1} = f(x) \text{ qui est intégrable.}$$

(**I. 6.** est encore utile). Les égalités suivantes s'obtiennent à l'aide de la définition de dérivée et du théorème de convergence monotone de Beppo-Levi:

$$\frac{d}{da} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} \right)_{a=0} = \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

D'après **III.3.** et vu les deux dérivées calculées ci-dessus, on a

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = F'(0) = \frac{d}{da} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} \right)_{a=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$