

Curriculum vitae de Barbara Schapira

Informations générales

SCHAPIRA Barbara, née le ...

Adresse personnelle :

...

Adresse professionnelle : L.A.M.F.A., UMR 6140 Université de Picardie, 33 rue St Leu, 80000 Amiens.

Tél. : 03 22 82 75 10. Fax : 03 22 82 78 38, Mél : Barbara.Schapira@u-picardie.fr

Situation administrative

Deuxième semestre 2011-2012 : Délégation CNRS au Laboratoire de mathématiques d'Orsay (UMR 8628)

Juin-décembre 2011 : Congé maternité (26 semaines)

Octobre 2010-septembre 2014 : Titulaire de la prime d'excellence scientifique

Deuxième semestre 2007-08 : Délégation CNRS au LAMFA (UMR 6140)

Premier semestre 2007-2008 : Congé maternité (16 semaines)

Octobre 2006-Septembre 2010 : Titulaire de la prime d'encadrement doctoral et de recherche.

Juillet- Novembre 2005 : Congé maternité/maladie (20 semaines)

Depuis septembre 2004 : Maîtresse de Conférence au L.A.M.F.A. à l'Université Picardie Jules Verne.

2003-2004 : A.T.E.R. à l'Université Paris Sud.

2000-2003 : Allocataire monitrice à l'Université d'Orléans.

Remarque sur la prise en compte des maternités dans le CV : L'évaluation de nos carrières, recrutements et promotions inclus, utilise souvent des critères d'âge plus ou moins explicites pour comparer les dossiers des différents candidats. Certaines institutions (ERC ⁽¹⁾, IUF ⁽²⁾) accordent un report de limite d'âge de 12 à 18 mois par enfant. Pour l'obtention de la PES ⁽³⁾, on peut faire prendre en compte une période de plus de 4 ans, pour les mêmes raisons. Une proposition issue de la journée parité ⁽⁴⁾ du 6 juin 2011 pour aller vers une meilleure féminisation de nos carrières est de compter une année blanche par enfant dans le CV des femmes.

Cursus et Titres Universitaires

- Novembre 2011 : Habilitation à diriger des recherches « *Géodésiques, horocycles, et leurs mesures invariants* », au vu des rapports de F. Dal'bo, F. Ledrappier et N. Shah, devant le jury composé de Marie-Claude Arnaud (Professeure, Avignon), Présidente du Jury, Gilles Courtois (Directeur de recherches CNRS, Institut Mathématique de Jussieu), Françoise Dal'bo (Professeure, Rennes I), Fabien Durand (Professeur, Amiens), Livio Flaminio (Professeur, Lille I), François Ledrappier (Professeur, Notre Dame University).
- Novembre 2003 : Doctorat de Mathématiques, mention très honorable : « *Propriétés ergodiques du feuilletage horosphérique d'une variété à courbure négative* », thèse effectuée sous la direction de Martine Babillot, et soutenue à l'Université d'Orléans devant le jury composé de F. Ledrappier (Notre Dame university), Président du jury, M. Peigné (Tours), M. Bourdon (Lille I), rapporteur, V. Kaimanovich (Rennes I), rapporteur, J. Renault (Orléans), H. Thuillier (Orléans).
- 2000-2003 : Allocataire-Monitrice (AMX) à l'université d'Orléans.
- Juin 2001 : Obtention de l'Agrégation externe de mathématiques (79ème).
- 1999-2000 : DEA de mathématiques, Institut Fourier, université Grenoble-I, mention Très Bien.
- 1996-1999 : Scolarité à l'École Polytechnique.

Invitations, exposés

Pour la recherche

J'ai été invitée à l'étranger, mais je refuse maintenant les invitations longues ou lointaines du fait que j'ai des enfants en bas âge.

1. http://erc.europa.eu/sites/default/files/document/file/erc_2012_guide%20for%20applicants_stg.pdf

2. <http://www.education.gouv.fr/cid53847/esrs1027183c.html>

3. http://media.enseignementsup-recherche.gouv.fr/file/2011/98/6/NOTE_D_INFORMATION_PES_2011_168986.pdf

4. http://postes.smai.emath.fr/parite/journee/journee_parite.php

- Avril 2005 : ETH, Zürich (Suisse), 10 jours.
- Mars 2004 : Technion University, Haifa et Ben Gourion University, Beer Sheva (Israel), deux semaines.
- Avril 2004 : Université de Neuchâtel (Suisse), une semaine.

Ces cinq dernières années (2007-2012), j'ai donné 25 exposés de recherche, dont trois dans des conférences internationales, un autre dans un séminaire à l'étranger, et deux exposés de type colloquium.

- Distribution dans le plan des orbites d'un sous-groupe de type fini de $SL(2, \mathbb{R})$
Orsay, groupe de travail théorie ergodique, mars 2012
Marseille, Séminaire Algèbre, dynamique, topologie du LAMP, mars 2012
Grenoble, Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, mars 2012
Montpellier, Séminaire Darboux, mars 2012
Amiens, Séminaire de théorie ergodique, février 2012
Bordeaux, Séminaire de Géométrie, janvier 2012
- Exposants critiques, groupes Kleiniens, de Schottky, convexe-cocompacts
Nantes, dans le cadre du projet ANR GEODE, avril 2011.
- Mesures génériques pour le flot géodésique en courbure négative ou nulle
Orléans, séminaire Analyse et dynamique, mars 2011
Avignon, séminaire géométrie et dynamique, janvier 2011
- Théorie ergodique, flot géodésique, flot horocyclique
Séminaire général, Université de Dijon, avril 2012
Colloquium, Université de Strasbourg, décembre 2010
- Density and equidistribution of half horocycles on geometrically finite hyperbolic surfaces
Workshop on Infinite Ergodic Theory, Rehovot, Israel, juin 2010
Oberwolfach, juillet 2010
- Densité et équidistribution de demi-horocycles
Rennes, dans le cadre du projet ANR TEMI, avril 2009
- Vecteurs génériques pour le flot horocyclique sur des revêtements abéliens de surfaces hyperboliques compactes,
Marseille (LAMP), séminaire algèbre, géométrie et dynamique, mars 2010
Toulouse, séminaire Groupes et Géométrie, février 2009
Bristol, Ergodic Seminar, January 2009
Orsay, groupe de travail théorie ergodique, janvier 2009
Rennes, Conférence Théorie ergodique en mesure infinie, dans le cadre de l'ANR TEMI, juin 2008
Séminaire de Théorie ergodique, Tours, mai 2007
Brest, dans le cadre du projet ANR Temi, novembre 2006
- Mesures de probabilité invariantes ergodiques de support plein pour des systèmes hyperboliques
Orsay, séminaire d'Analyse harmonique, mars 2010
Lille, séminaire Géométrie et dynamique, novembre 2009
Amiens, séminaire de théorie ergodique, mai 2008
Luminy, dans le cadre du projet ANR Temi, mai 2007

Autres interventions

J'ai également donné une vingtaine d'exposés grand public, dans des collèges et lycées de la région Picardie. ⁽⁵⁾

Je suis intervenue sur la question de la parité, lors de la journée d'accueil des nouveaux maîtres de conférence en mathématiques, en janvier 2011 ⁽⁶⁾.

5. http://www.lamfa.u-picardie.fr/schapira/Vulgarisation/propositions_exposes.html

6. <http://www.lamfa.u-picardie.fr/schapira/recherche/barbara-schapira-accueilMCF-janvier2011.pdf>

Publications et prépublications

Tous mes travaux sont accessibles depuis ma page web recherche (⁷).

[1] « Propriétés ergodiques du feuilletage horosphérique d'une variété à courbure négative », Thèse de l'Université d'Orléans (2003).

[2] « On quasi-invariant transverse measures for the horospherical foliation of a negatively curved manifold », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **24**, no.1, (2004), 227-256.

[3] « Mesures quasi-invariantes pour un feuilletage et limites de moyennes longitudinales », *C.R. Acad.Sci. Paris, Sér. I* **336** (2003), 349-352.

[4] « Lemme de l'ombre et non divergence des horosphères d'une variété géométriquement finie », *Annales de l'Institut Fourier* **54** no. 4, (2004), 939-987.

[5] « Équidistribution of the horocycles of a geometrically finite surface », *Int. Math. Res. Not.* (2005), no. 40, 2447-2471.

[6] « Propriétés ergodiques du flot horocyclique d'une surface hyperbolique géométriquement finie », survol des travaux précédents dans le cas des surfaces hyperboliques. *Cahiers du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie*, Institut Fourier, (2003) 147-163.

[7] « Generic measures for hyperbolic flows on non compact spaces », avec Yves Coudène, Israël Journal of Maths vol 179 (2010).

[8] « Théorèmes ergodiques pour des actions de groupes », *L'Enseignement mathématique* (2010), avec C. Anantharaman, JP Anker, M. Babillot, A. Bonami, B. Demange, S. Grellier, F. Havard, P. Jaming, E. Lesigne, P. Maheux, JP Otal, JP Schreiber.

[9] « The generic points for the horocycle flow on a class of hyperbolic surfaces with infinite genus », avec Omri Sarig, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2008), Art. ID rnn 086, 37 pp.

[10] « Density and equidistribution of half horocycles on geometrically finite manifolds », *Journal of the London Math. Soc* ;(2011) 84(3) : 785-806.

[11] « Counterexamples in nonpositive curvature », avec Yves Coudène, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **30** (2011), no. 4, 1095–1106.

[12] « Densité de demi-horocycles sur une surface hyperbolique géométriquement infinie », accepté pour publication, sous réserve de légères corrections, dans *Ergodic Theory Dynam. Systems* (2012).

[13] « Distribution of orbits in the plane of a finitely generated subgroup of $SL(2, \mathbb{R})$ », avec François Maucourant, (2011), prépublication.

[14] « Géodésiques, horocycles, et leurs mesures invariantes », mémoire d'habilitation à diriger des recherches, 2011.

Travaux en cours :

[15] Equilibrium states in negative curvature, avec Frédéric Paulin et Mark Pollicott (en cours de rédaction).

[16] Generic measures for geodesic flows on nonpositively curved manifolds, avec Yves Coudène (travail en cours).

[17] Gibbs measures on rank one manifolds, avec Katrin Gelfert (travail en cours).

7. <http://www.lamfa.u-picardie.fr/schapira/recherche/index.html>

Rapport d'activités

Activités en matière d'enseignement, de diffusion des mathématiques au grand public, d'animation scientifique et autres responsabilités collectives, et de recherche

Activités d'enseignement

Voir ma page web enseignement (⁸).

Depuis septembre 2000 comme monitrice puis A.T.E.R. et depuis septembre 2004, en tant que maîtresse de conférences, j'enseigne des mathématiques variées (analyse, algèbre, géométrie et probabilités) à tous les niveaux, en L1 et L2 en début de carrière, et ces dernières années en préparation à l'agrégation, mais aussi en Licence (L3) et Master de mathématiques, en cours ou travaux dirigés.

- En *préparation à l'agrégation*, j'effectuais ces dernières années environ la moitié de mon service d'enseignement : préparation à l'écrit, à l'oral d'analyse et d'algèbre et géométrie (suites, calcul différentiel, suites et séries de fonctions, intégration, géométrie différentielle, isométries, homographies, actions de groupes, ...).

- Enseignements en *Master de mathématiques* :

- * J'encadre quasiment chaque année des étudiants pour leur mémoire de Master I (Étude qualitative des équations différentielles, Géométrie projective, Géométrie hyperbolique, Fractales et dimensions, Marches aléatoires et circuits électriques, Groupes hyperboliques).
- * J'ai enseigné les Probabilités en M1 (TD, 50h, rappels de L3, espérance conditionnelle, martingales).
- * J'ai enseigné un module intitulé « Anglais scientifique en situation » en M2 (étude et exposés sur des textes mathématiques en anglais).
- * J'ai donné quelques heures d'introduction à mon domaine de recherche, dans le cadre d'un cours de théorie ergodique en M2.

- Enseignements en *Licence* :

- * En L3, j'ai eu l'occasion de faire des TD d'algèbre générale (anneaux, corps), d'intégration (théorie de la mesure, intégrale de Lebesgue, espaces L^p , introduction à l'analyse de Fourier), et un cours+TD de probabilités (probabilités avec théorie de la mesure, fonctions caractéristiques, lois des grands nombres, TCL).
- * En L1 et L2, j'ai effectué un enseignement sur les courbes planes (cours+TD+TP), des statistiques (TP sous Excel).
- * En DEUG 1ère et 2ème année, en tant que monitrice (Orléans) et ATER (Orsay), j'ai effectué mes enseignements dans des filières et modules très variés : Analyse et algèbre classiques en M.I.A.S. et M.A.S.S., Outils mathématiques pour la physique, la biologie et l'économie, T.P. sur ordinateur (statistiques avec Excel, analyse numérique avec Matlab, illustration du cours d'algèbre et d'analyse avec Maple).

Diffusion des mathématiques auprès du grand public

Je suis très intéressée par la diffusion grand public des mathématiques (⁹).

- Je coordonne actuellement les actions de diffusion des mathématiques auprès du grand public dans mon laboratoire.
- J'ai participé à l'organisation du concours Enigmath 2006 et 2007 (¹⁰).
- Je donne régulièrement des exposés de mathématiques dans des classes de lycée de la région.
- J'ai lancé l'initiative d'un « catalogue » d'exposés (que je coordonne) que les enseignants-chercheurs en mathématiques d'Amiens proposent de faire dans les lycées (¹¹).
- J'ai encadré deux stages de collégiennes de 3ème au laboratoire, en février 2010, et en février 2012.
- En 2008-2009, j'ai été responsable pour l'UPJV (et la Picardie donc), de l'organisation de l'édition régio-

8. <http://www.lamfa.u-picardie.fr/schapira/enseignement/index.html>

9. <http://www.mathinfo.u-picardie.fr/schapira/Vulgarisation/vulgarisation.html>

10. <http://www.enigmath.org>

11. http://www.mathinfo.u-picardie.fr/schapira/Vulgarisation/propositions_exposes.html

nale du concours national « Faites de la Science » ⁽¹²⁾ à l'initiative de la CDUS (conférence des doyens d'UFR scientifiques). C'est un concours scientifique finançant des classes du secondaire dans un projet scientifique.

Animation scientifique et responsabilités d'intérêt collectif

Animation de la recherche

- Création puis organisation du séminaire doctorant à l'université d'Orléans (2000-2003).
- Co-organisation du Séminaire de Théorie Ergodique d'Amiens (2004-2006).
- Organisation du colloquium (mensuel) de mon laboratoire pendant 2 ans et demi (2008-2010).
- Co-organisation de conférences et rencontres :
 - * Conférence Dynamique et Aléa, mai 2006, sur la côte picarde,
 - * Rencontre amiénoise du projet ANR « Théorie ergodique en mesure infinie », Juin 2006, Amiens,
 - * Conférence internationale « Infinite ergodic theory », Rennes, Juin 2008,
 - * Rencontres amiénoises « Regards croisés sur les méthodes spectrales en géométrie ergodique », du GDR Platon « Géométrie, Arithmétique, Probabilités », Amiens, octobre 2010.
 - * Rencontre du projet ANR Géode, « Initiation aux espaces de Teichmüller et aux billards infinis », Rennes, mars 2012.
 - * Rencontre du projet ANR « Géode », CIRM, Luminy, octobre 2012.
- Activité d'évaluation pour G.A.F.A. et Mathscinet.
- Coordination d'un projet jeunes chercheuses et jeunes chercheurs financé par l'agence nationale de la recherche (ANR-10-JCJC-0108), intitulé « GEODE », sur les propriétés ergodiques du flot géodésique sur les variétés non compactes à courbure négative ou nulle, septembre 2010-septembre 2014.

Action en faveur de la parité en mathématiques

Les mathématiques fondamentales (section 25) sont la seule discipline universitaire dans laquelle la proportion de femmes diminue au lieu de progresser, depuis une vingtaine d'années. De plus, cette proportion diminue au fil de la carrière. Ceci est tout à fait dommage. En particulier, indépendamment des considérations morales, à l'heure où nous cherchons à attirer plus de jeunes vers les mathématiques, cette question de la parité dans les carrières mathématiques est devenue cruciale pour notre discipline.

- J'ai contribué à créer une liste de discussion intitulée `forum-parite@listes.math.cnrs.fr`, pour y discuter des liens entre le genre et la carrière des mathématicien-ne-s.
- J'ai été en partie à l'initiative, et co-organisé la première journée consacrée à la parité en mathématiques, en juin 2011 ⁽¹³⁾.
- Je suis intervenue, par écrit et par oral, sur ce sujet ^(14, 15, 16).

Autres responsabilités d'intérêt collectif

- Je suis correspondante de la SMF au sein de mon laboratoire.
- J'étais membre suppléante de la Commission de spécialistes 25-26 (2005-2008) jusqu'à la mise en place des comités de sélection, puis membre de comités de sélection à Amiens (2009), Nantes (2010), Marseille (2011), Grenoble (2012).
- Dans le département de mathématiques, j'ai participé activement à l'élaboration de la maquette quadriennale d'enseignements de licence 2007-2011.
- Je me suis occupé de réaliser une enquête sur le devenir professionnel de nos étudiants, dans le but de faire un petit livret ⁽¹⁷⁾ « les études de maths, pour qui, pour quoi faire ? » à destination des lycéen-ne-s et étudiant-e-s de la région (sur le modèle de la brochure « Les métiers des mathématiques » éditée par la SMF, la SMAI, l'Onisep, etc).

12. <http://www.u-picardie.fr/faitesdelascience>

13. http://postes.smai.emath.fr/parite/journee/journee_parite.php

14. <http://images.math.cnrs.fr/Mathematicienne.html>

15. <http://www.lamfa.u-picardie.fr/schapira/recherche/barbara-schapira-accueilMCF-janvier20>

16. http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2011/130/smf_gazette_130_93-98.pdf

17. <http://www.lamfa.u-picardie.fr/schapira/enseignement/livret-anonyme.pdf>

Activités de recherche

Mes activités de recherche ont lieu à la fois dans le cadre de mon laboratoire, le LAMFA UMR CNRS 6140, et au sein de différents groupes de recherche.

De 2006 à mi 2009, je faisais partie du projet ANR TEMI (Théorie ergodique en mesure infinie), coordonné par Yves Coudène, avec Y. Coudène (coordinateur), J-B Bardet, X. Bressaud, S. Gouëzel, R. Leplaideur, F. Maucourant et F. Pène. Nous avons organisé des rencontres régulières à Rennes, Amiens, Brest et Marseille. Les nombreux exposés et invitations de chercheurs étrangers ont fait émerger à la fois de nouvelles questions naturelles, mais aussi des résultats et des collaborations en cours. L'essentiel de mes questions, publications et travaux en cours depuis 2006 (sauf [8]) ont leur origine dans ce projet ANR.

Depuis 2009, je participe très régulièrement aux rencontres du GDR CNRS « Géométrie, Arithmétique, Probabilités », alias GDR Platon ⁽¹⁸⁾, coordonné par Françoise Dal'bo, dont je fais partie. Ce GDR m'a permis de rencontrer régulièrement des collègues de toute la France intéressés par la géométrie ergodique, à savoir l'étude des propriétés dynamiques et ergodiques de systèmes dynamiques d'origine géométrique. Ces rencontres ont fortement accéléré mes projets et activités de recherche en cours.

Je coordonne depuis septembre 2010 le projet ANR-10-JCJC 0108 « GEODE », sur les propriétés ergodiques du flot géodésique sur les variétés non compactes à courbure négative ou nulle. Les participants sont Yves Coudène, Cyril Lecuire, François Maucourant, Frédéric Naud, Françoise Pène, Benoit Sausol et Samuel Tapie. Ce projet ANR, bien plus géométrique que « TEMI », se situe dans la continuité de mes travaux précédents et des activités du GDR Platon.

Mes travaux de recherche portent principalement sur les propriétés ergodiques de deux systèmes dynamiques d'origine géométrique, le flot géodésique et le flot horocyclique sur le fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne à courbure négative. Ces deux flots sont des objets d'étude extrêmement classiques depuis plus d'un siècle, lorsqu'on considère des surfaces hyperboliques compactes. Je m'intéresse aux variétés de dimension plus grande, courbure variable négative et éventuellement nulle, et non compactes, le plus souvent de volume infini. Ces situations fournissent des exemples naturels de systèmes dynamiques en mesure infinie, et/ou non uniformément hyperboliques, et/ou sur des espaces non compacts.

Le flot géodésique est un exemple typique de flot hyperbolique, aux fortes propriétés stochastiques. Dans les situations classiques, il a une infinité d'orbites périodiques, de mesures de probabilité invariantes, il est d'entropie positive, exponentiellement mélangeant, ...

Le flot horocyclique est très lié au précédent, mais se comporte très différemment. En effet, ses orbites décrivent les variétés fortement stables du flot géodésique. Son comportement décrit les différents comportements asymptotiques du flot géodésique, et plus précisément les différentes façons de partir (ou non) à l'infini pour le flot géodésique. Ainsi, sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique compacte, il est d'entropie nulle, mélangeant, mais à vitesse polynomiale, minimal (toutes ses orbites sont denses) et uniquement ergodique. La mesure de Lebesgue/Liouville est l'unique mesure invariante, et toutes les orbites du flot horocyclique s'équidistribuent vers elle.

Dans mes travaux [2,7,11,15,16], je m'intéresse aux mesures invariantes pour le flot géodésique. Je décris des propriétés génériques (au sens de Baire) de ces mesures dans [7,11,16], et je m'intéresse à une famille de mesures aux très bonnes propriétés ergodiques, les mesures de Gibbs, dans [2,15].

Plus précisément, dans [7], nous montrons (avec Yves Coudène) que sur le fibré unitaire tangent d'une variété à courbure strictement négative, sans aucune hypothèse de compacité ni borne sur la courbure, parmi les mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique, les mesures invariantes ergodiques de support plein forment un G_δ -dense. Nous étendons ce résultat sous certaines conditions aux variétés de courbure négative ou nulle dans [7,16], et fournissons des contre-exemples en courbure négative ou nulle dans [11].

Les mesures de Gibbs sont une famille bien particulière de mesures invariantes par le flot géodésique, associées à des « potentiels », i.e. des fonctions höldériennes qui pondèrent d'une certaine façon la dynamique. On attend de ces mesures de très fortes propriétés stochastiques en général (mélange, entropie positive, ...) Dans [2], j'avais étudié des propriétés d'unique ergodicité et d'équidistribution

18. <http://costia.free.fr/platon/index.html>

des orbites du flot horocyclique pour des mesures quasi-invariantes liées aux mesures de Gibbs. Dans [15], avec Frédéric Paulin et Marc Pollicott, nous construisons les mesures de Gibbs sur le fibré unitaire tangent d'une variété à courbure négative, sans hypothèse restrictive, et nous établissons des propriétés de comptage d'orbites utilisant ces mesures, ainsi qu'un principe variationnel montrant que, dans les bonnes situations, la mesure de Gibbs associée à un potentiel donné coïncide avec la mesure d'équilibre du potentiel, une autre mesure très importante associée classiquement par le formalisme thermodynamique à un potentiel höldérien. Nous généralisons ainsi des résultats de Thomas Roblin d'une part, et de Jean-Pierre Otal et Marc Peigné d'autre part, dans le cas de la mesure d'entropie maximale (associée au potentiel nul).

Dans mes travaux [4,5,9,10,12], je m'intéresse aux propriétés d'équidistribution des horocycles, dans différentes situations : variétés géométriquement finies [4,5,10], revêtements abéliens de surfaces compactes [9], et surfaces géométriquement infinies quelconques dans [12]. L'originalité de ces travaux est que j'obtiens des propriétés d'équidistribution des horocycles dans des situations où le flot horocyclique n'est plus uniquement ergodique. Des critères géométriques permettent de déterminer quelles orbites vont s'équidistribuer vers quelles mesures. Nos résultats sont des analogues sûrs du théorème de Birkhoff, qui n'est lui que presque sûr, et ne permet pas de dire si un vecteur donné s'équidistribue vers une mesure donnée.

Dans [4,5,10], je m'intéresse aux variétés géométriquement finies. Une surface hyperbolique est géométriquement finie si son groupe fondamental est de type fini (c'est un peu plus compliqué en dimension supérieure). Sur le fibré unitaire tangent d'une telle surface, le flot horocyclique a trois types d'orbites : des orbites errantes, des orbites périodiques, et des orbites denses dans l'ensemble non-errant du flot horocyclique. De plus, en dehors des mesures portées par les orbites périodiques, il existe une unique mesure invariante ergodique pour le flot horocyclique sur l'ensemble non-errant.

Dans [4], j'ai montré que les orbites denses dans l'ensemble non errant ne divergent pas : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact K_ε dans lequel elles passent asymptotiquement une « proportion de temps » $1 - \varepsilon$. Ceci m'a permis dans [5] de montrer qu'elle s'équidistribuent vers l'unique mesure invariante ergodique non périodique. Dans [10] j'ai précisé l'énoncé de [5], en considérant des demi-orbites au lieu d'orbites symétriques.

Dans [12], j'ai poursuivi mon étude des demi-orbites du flot horocyclique, d'un point de vue topologique, sur des surfaces géométriquement infinies.

Dans [9], avec Omri Sarig, nous nous sommes intéressés aux revêtements abéliens des surfaces hyperboliques compactes. Les mesures invariantes ergodiques pour le flot horocyclique sont en nombre infini, mais bien comprises, et nous avons caractérisé leurs points génériques.

Dans [13], nous précisons les propriétés d'équidistribution du flot horocyclique sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique géométriquement finie, pour démontrer ensuite des résultats sur la distribution des orbites dans le plan d'un sous-groupe de type fini de $SL(2, \mathbb{R})$. Il s'agit d'une généralisation aux groupes de type fini d'un résultat de Ledrappier en volume fini.

Pour finir, le travail [8], un peu à part, est un livre collectif issu d'un groupe de travail qui s'est tenu pendant ma thèse à Orléans, autour des théorèmes ergodiques obtenus par Amos Nevo, pour des actions de groupes non moyennables.

Projets de recherche de Barbara Schapira
Autour du flot géodésique en courbure négative ou nulle

Contexte, problématiques

Mes projets pour le futur relèvent de la même interrogation qui m'a menée à mes travaux passés, même si le spectre des questions posées est plus large.

L'étude du flot géodésique et du flot horocyclique sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique de volume fini est classique, et leurs propriétés sont bien comprises.

Je m'intéresse à ces systèmes dynamiques en dimension plus grande, en courbure négative variable, éventuellement nulle, et sur des variétés non compactes, de volume infini, en mesure infinie. Je souhaite à la fois mettre à jour de nouveaux phénomènes dynamiques dans ce cadre plus général, ou étendre des résultats classiques, mais à l'aide de nouvelles méthodes, plus géométriques, plus robustes. L'une de mes motivations principales est de comprendre le lien entre des propriétés géométriques comme la courbure de la variété, des propriétés de finitude (compacité, volume fini, groupe fondamental de type fini...), et les propriétés ergodiques des flots géodésique et horocyclique.

Mes projets sont développés ci-dessous. La première partie traite de questions qui sont le prolongement immédiat de mes travaux précédents, et devraient être résolues dans un futur proche. Les deux parties suivantes développent des questions nouvelles, plus ardues, mais dans la suite logique de mes travaux précédents. Ces questions sont rassemblées en deux thèmes, le flot horocyclique et le formalisme thermodynamique pour le flot géodésique. Dans une quatrième partie, je présente des questions ouvertes autour des exposants critiques, qui sont au coeur de nos sujets d'intérêt au sein du projet ANR JCJC « Geode » que je coordonne.

Je ne développe pas d'autres thèmes que j'aimerais aborder dans le futur, plus éloignés de mes travaux précédents, autour de la dynamique des flots géodésique et horocyclique de Teichmüller, où les idées et méthodes de mes travaux passés pourraient certainement être une bonne source d'inspiration.

1 Prolongements de travaux en cours

Densité de demi-horocycles

Sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique compacte, le flot horocyclique est minimal : toutes ses orbites sont denses. En volume fini, ceci reste essentiellement vrai : toutes les orbites non périodiques sont denses. Ce résultat est dû à Hedlund, dans les années 1930. Il s'était déjà intéressé à la question de savoir si, lorsque l'orbite de v par le flot horocyclique est dense, ses deux demi-orbités $(h^s v)_{s \geq 0}$ et $(h^s v)_{s \leq 0}$ sont toutes deux denses ou non, et répondait par l'affirmative dans un cas particulier. Dans deux travaux récents [10] et [11], je me suis intéressée à cette question, pour des surfaces respectivement géométriquement finies dans [10] (groupe fondamental de type fini), et géométriquement infinies dans [11]. La réponse apportée est complète dans [10], mais pas tout à fait dans [11], où je donne une condition suffisante pour que les deux demi-orbités en temps positif et négatif aient le même comportement, et un contre-exemple lorsque cette condition n'est pas satisfaite. Précisément, si l'orbite de v par le flot géodésique croise une infinité de géodésiques périodiques de longueur bornée, suivant un angle d'intersection minoré, alors les deux demi-horocycles de v ont le même comportement asymptotique. Cette hypothèse apparaît ailleurs dans la littérature, sous une forme affaiblie, à savoir sans la condition d'angle minoré. J'aimerais ôter cette restriction.

Action linéaire de $SO(n, 1)$

Avec François Maucourant, dans [13], nous améliorons des résultats d'équidistribution du flot horocyclique, essentiellement obtenus dans [5], puis nous les utilisons pour étudier la distribution dans le plan \mathbb{R}^2 des orbites sous l'action linéaire d'un sous-groupe de type fini de $SL(2, \mathbb{R})$. Nous aimerions étendre ces résultats en dimension supérieure, pour étudier la distribution d'orbites sous l'action linéaire de sous-groupes de type fini de $SO(n, 1)$. Vraisemblablement, les difficultés sont surmontables, et ceci devrait être fait prochainement.

Mesures génériques pour le flot géodésique en courbure négative ou nulle

Avec Yves Coudène, nous avons étudié dans [7] les propriétés génériques des mesures invariantes pour le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété à courbure sectionnelle strictement négative.

Précisément, nous avons montré que les probabilités invariantes ergodiques de support plein forment un G_δ -dense de l'ensemble des probabilités invariantes. Nos méthodes nous ont permis d'étendre nos résultats en courbure négative ou nulle, en restriction à certains sous-ensembles du fibré tangent. Mais dans [11], en présence de cylindres plats (euclidiens), nous avons fourni des contre-exemples à nos résultats précédents. Nous essayons actuellement de trouver des sous-ensembles relativement gros du fibré tangent, excluant les cylindres plats, mais si possible rien d'autre, sur lesquels étendre nos résultats précédents. C'est le travail numéroté [16] plus haut.

2 Flot horocyclique

Flots unipotents pour des variétés convexe-cocompactes de dimension (au moins) trois

Sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique compacte, le flot horocyclique est un flot uniquement ergodique : toutes ses orbites non périodiques sont équidistribuées suivant la mesure de Liouville (Furstenberg).

En dimension supérieure, un flot unipotent est un flot de dimension 1 bien sûr, dont les orbites sont incluses dans les variétés fortement stables du flot géodésique. D'une part, on sait que ces variétés fortement stables forment un feuilletage (le feuilletage fortement stable) qui est uniquement ergodique (Bowen-Marcus). Mais mieux encore, étant donné n'importe quel flot unipotent, les orbites non périodiques sont équidistribuées suivant l'unique mesure invariante par le feuilletage fortement stable (Ratner).

Soit maintenant M une variété hyperbolique convexe-cocompacte, c'est-à-dire non compacte, mais telle que l'ensemble non-errant du flot géodésique est compact. Le résultat de Bowen-Marcus reste vrai dans ce cadre. Mais l'étude du comportement des flots unipotents dans ce cadre est plus difficile. En effet, les orbites d'un tel flot peuvent sortir de l'ensemble non-errant pour y revenir (ou pas). Je souhaite étudier cette situation, déjà en dimension 3 pour commencer, pour essayer de comprendre comment les orbites de flots unipotents peuvent ou non s'équidistribuer suivant l'unique mesure invariante par le feuilletage fortement stable. Ceci nécessite de vérifier s'il y a ou non d'autres mesures invariantes par ces flots unipotents que l'unique mesure invariante par tout le feuilletage fortement stable. Un travail très récent de Mohammadi-Oh va dans cette direction, en établissant la conservativité et l'ergodicité, pour ces flots unipotents, de l'unique mesure invariante par tout le feuilletage stable, sous certaines conditions.

Flot horocyclique, revêtements de surfaces hyperboliques compactes, mesures invariantes et théorie géométrique des groupes

Considérons le flot horocyclique sur le fibré unitaire tangent du revêtement abélien d'une surface hyperbolique compacte. Les travaux de Babillot-Ledrappier et Sarig ont permis d'établir une bijection entre l'ensemble des mesures de Radon invariantes ergodiques pour le flot horocyclique et l'ensemble des « cycles asymptotiques », un cycle asymptotique mesurant le déplacement asymptotique moyen dans le groupe de revêtement d'un rayon géodésique.

D'autres travaux de Babillot, Ledrappier, Sarig, avec un point de vue plus analytique, font un lien entre les mesures invariantes ergodiques pour le flot horocyclique, et certaines fonctions harmoniques extrémales, pour des surfaces hyperboliques très générales.

Par définition, le flot horocyclique décrit les différents comportements asymptotiques du flot géodésique, puisque ses orbites sont les variétés fortement stables du flot géodésique. L'analyse harmonique fournit des outils (analytiques) pour décrire les façons de partir à l'infini. La notion de cycle asymptotique est un outil géométrique pour décrire la façon de partir à l'infini dans un groupe de type \mathbb{Z}^d .

Je souhaite m'intéresser à des revêtements non nécessairement abéliens de surfaces hyperboliques compactes, et établir un lien entre les mesures invariantes ergodiques du flot horocyclique et certaines propriétés de théorie géométrique des groupes du groupe de revêtement, comme peut-être la notion de cône asymptotique.

3 Formalisme thermodynamique

Finitude des mesures de Gibbs

Ce travail est la suite du travail [15] en cours de rédaction. Sur le fibré unitaire tangent d'une variété non compacte à courbure négative, dans [15], nous construisons les « mesures de Gibbs », mesures inva-

riantes pour le flot géodésique associées à certains « potentiels », i.e. des fonctions höldériennes définies sur le fibré unitaire tangent. Nous étudions les propriétés de ces mesures, et obtenons en particulier un certain nombre de résultats de comptage des orbites périodiques du flot géodésique, et un principe variationnel pour la pression, à condition que la mesure de Gibbs m^f construite soit finie. Omri Sarig a effectué un travail analogue dans le cadre symbolique des décalages à alphabet dénombrable, mais ses résultats sont plus complets. Dans une terminologie probabiliste, il introduit la notion de potentiel récurrent positif, récurrent nul, et transitoire. À l'aide de méthodes d'opérateur en particulier, il démontre qu'il y a alors une « trichotomie » : si le potentiel est récurrent positif, la mesure m^f est finie ergodique. S'il est récurrent nul, elle est infinie ergodique, et dans le dernier cas, la mesure n'est même pas ergodique. De plus, et c'est le coeur de son résultat, il caractérise chacun des trois cas en termes de la croissance du nombre de géodésiques périodiques de longueur plus petite que T , quand $T \rightarrow +\infty$, et du nombre de géodésiques périodiques primitives de longueur au plus T . Je souhaite étendre ses résultats au cadre géométrique, pour trouver des critères géométriques de finitude des mesures de Gibbs.

Mesures de Gibbs pour des potentiels non höldériens sur des variétés de rang un

Avec Katrin Gelfert, nous souhaitons nous intéresser aux mesures de Gibbs sur les variétés de rang un, à savoir des variétés à courbure négative ou nulle qui possèdent des vecteurs hyperboliques, en un certain sens. Knieper a déjà étudié le cas de la mesure d'entropie maximale.

D'un autre côté, rappelons cette difficile conjecture, toujours ouverte à ce jour, qui affirme que sur une variété compacte de rang un, la mesure de Liouville est ergodique. (On sait que sa restriction à l'ensemble des vecteurs de rang un l'est).

Sur le fibré unitaire tangent d'une variété compacte à courbure strictement négative, la mesure de Liouville est une mesure de Gibbs, pour un potentiel höldérien (le logarithme du Jacobien instable du flot géodésique). Malheureusement, lorsque la courbure s'annule, ce potentiel n'est plus höldérien.

Si la construction de la mesure de Gibbs associée à ce potentiel pouvait se faire raisonnablement, non seulement sur l'ensemble des vecteurs de rang un (sur lequel il est höldérien), mais sur le fibré unitaire tangent tout entier, à l'aide d'un résultat de type principe variationnel, on pourrait peut-être identifier la mesure de Liouville comme une mesure de Gibbs, et déduire son ergodicité. Un tel objectif est sans aucun doute très (trop ?) ambitieux.

Mais nous essayons de faire fonctionner la construction des mesures de Gibbs pour certains potentiels Höldériens, sous certaines hypothèses complémentaires. Par exemple, si le potentiel f est à support compact dans une zone où la courbure est négative, ou bien si sa pression vérifie $P(f) > \sup f$, nous pensons être capables de construire une mesure de Gibbs pour le potentiel, et démontrer l'unicité de l'état d'équilibre. Aucune de ces deux hypothèses n'implique ni n'exclut l'autre. Malheureusement, aucune des deux n'est vérifiée pour le potentiel qui redonnerait la mesure de Liouville.

Mélange des mesures de Gibbs

En dynamique symbolique, les mesures de Gibbs sont des mesures exponentiellement mélangeantes. Dans notre cadre géométrique, les travaux de Babillot nous disent que dès qu'une mesure de Gibbs est finie, elle est mélangeante, à condition toutefois que le flot géodésique soit topologiquement mélangeant. Dans le cas particulier de la mesure de Liouville, certains résultats existent sur la vitesse de mélange (Dolgopyat, Liverani). Avec Frédéric Paulin, nous souhaitons étudier la question de la vitesse de mélange de toutes les mesures de Gibbs, et essayer de comprendre si les méthodes utilisées pour la mesure de Liouville ont une chance de s'adapter.

4 Autour des exposants critiques

Soit M une variété riemannienne à courbure strictement négative, non nécessairement compacte, et soit Γ son groupe fondamental. L'exposant critique δ_Γ de Γ est défini comme le taux de croissance exponentielle du nombre de points d'une orbite de Γ dans une boule de rayon R sur le revêtement universel \widetilde{M} de M , lorsque $R \rightarrow +\infty$. C'est également l'exposant critique de la série de Poincaré $\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o,\gamma.o)}$, où

o est un point quelconque de \widetilde{M} et d est la distance riemannienne sur \widetilde{M} .

Il coïncide avec la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite radial, sous-ensemble du bord à l'infini $\partial\widetilde{M}$ de \widetilde{M} , qui permet de comprendre l'ensemble des géodésiques de M qui ne partent pas à l'infini. Sur des variétés compactes à courbure négative, il est connu que l'exposant critique coïncide

avec l'entropie volumique et l'entropie topologique du flot géodésique. Sur des variétés non compactes, il reste vrai que l'exposant critique est égal à l'entropie topologique du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent T^1M de M , mais c'est un résultat plus difficile (Otal-Peigné). Il coïncide également avec le taux de croissance exponentiel du nombre de géodésiques périodiques de longueur plus petite que T intersectant un compact donné, quand $T \rightarrow +\infty$. C'est une quantité fondamentale pour l'étude des propriétés géométriques et dynamiques des variétés à courbure négative, particulièrement quand elles sont de volume infini, ou à courbure variable. Pourtant, ses propriétés restent mal comprises. Dans le cadre du projet ANR Geode, avec les autres participants, je souhaite explorer un certain nombre de questions, développées ci-dessous.

Régularité des exposants critiques

Dans le « dictionnaire de Sullivan » entre les groupes Kleinien et les applications polynomiales du plan complexe, cet exposant critique est l'analogue de la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Julia du polynôme. La question de la continuité de cette dimension quand le polynôme varie dans l'ensemble de Mandelbrot, ou plus généralement dans l'ensemble des paramètres des polynômes de degré deux, est très difficile. Il est connu que lorsqu'une suite de polynômes converge à l'intérieur d'une composante hyperbolique de l'ensemble de Mandelbrot, l'exposant critique varie continûment. Sur le bord d'une telle composante, la continuité reste vraie si les polynômes convergent radialement. Mais des discontinuités peuvent apparaître dans le cas de convergence tangentielle. McMullen a traité la question analogue pour les groupes Kleinien géométriquement finis. Il prouve essentiellement que dans une famille de variétés géométriquement finies, si une suite de groupes Kleinien converge géométriquement vers un groupe Kleinien et si les éléments paraboliques de la suite de groupes Kleinien sont contrôlés, alors la suite d'exposants critiques converge vers l'exposant critique du groupe limite.

Nous souhaitons étudier cette question pour des variétés de courbure négative variable, non nécessairement géométriquement finies. La définition de convergence géométrique à l'aide de la topologie de Chabauty sur les groupes Kleinien n'a pas de sens dans ce cadre. Mais il est bien connu que la convergence géométrique d'une suite de groupes Kleinien est équivalente à la convergence des variétés quotient en topologie de Gromov-Hausdorff pointée. Nous considérons donc l'ensemble des variétés à courbure négative pincée muni de la topologie de Gromov-Hausdorff pointée, et nous étudions le comportement de l'exposant critique dans cet espace. En restriction à l'ensemble des variétés géométriquement finies, il est vraisemblable que la continuité des exposants critiques soit relativement facile à prouver, sous des hypothèses similaires à celles de McMullen. Mais nous nous intéressons aussi au cas général, a priori bien plus difficile.

Bornes universelles sur les exposants critiques de groupes de Schottky

Un groupe de Schottky est un groupe discret d'isométries d'une variété simplement connexe à courbure négative \widetilde{M} , dont la construction géométrique très simple montre immédiatement, par un argument appelé « ping-pong », qu'il est libre. (Mais la réciproque est fautive ; les groupes libres, dans ce contexte, ne sont pas nécessairement de Schottky.)

Dans des travaux de Phillips-Sarnak pour $n \geq 4$ et Doyle pour $n = 3$, il est montré que l'exposant critique d'un groupe de Schottky a une borne supérieure universelle $C(n) < n - 1$. Ce résultat profond a été prouvé par des méthodes spectrales utilisant des quotients de Rayleigh et de la chirurgie pour obtenir une borne inférieure de la première valeur propre du Laplacien. Il n'existe pas de preuve dynamique de ce résultat, malgré les progrès du formalisme thermodynamique et de l'étude des exposants critiques. Il serait intéressant de comprendre ces résultats de ce point de vue. La borne obtenue dans Doyle n'est pas explicite. Toute amélioration serait la bienvenue, surtout avec une preuve dynamique / géométrique.

Réaliser l'exposant critique d'un groupe comme supremum des exposants de ses sous-groupes ?

Considérons un groupe discret Γ d'isométries d'une variété \widetilde{M} à courbure négative, de type infini. Il est naturel d'espérer calculer, ou au moins estimer son exposant critique à l'aide des exposants critiques de bons sous-groupes. Par exemple, on aimerait démontrer que δ_Γ est le supremum des $\delta_{\Gamma'}$, Γ' variant parmi les sous-groupes de type fini de Γ .

Les bornes universelles sur les exposants critiques de groupes de Schottky montrent qu'il n'est pas raisonnable en général d'espérer le même résultat pour des Γ' Schottky, tout au moins dès que l'exposant critique δ_Γ excède la borne universelle $C(n)$ des exposants des groupes de Schottky.

Il est toutefois peut-être possible d'obtenir δ_Γ comme supremum des $\delta_{\Gamma'}$, Γ' variant parmi les sous-groupes convexe-cocompacts de Γ . Ceci serait très intéressant, car la dynamique du flot géodésique sur

le fibré unitaire tangent d'une variété convexe-cocompacte est très bien comprise. Étonnamment, cette question très naturelle est ouverte même dans le cas apparemment très simple où Γ est géométriquement fini, ou de type fini.

5 Autres questions, conclusion

Les questions développées ci-dessus devraient m'occuper pour les années à venir. Je souhaite également, si j'en ai l'opportunité, pouvoir encadrer un doctorant sur les thématiques ci-dessus, particulièrement les nombreuses questions autour des exposants critiques.

Par ailleurs, je souhaite également dans le futur m'intéresser à la dynamique des flots géodésique et horocyclique de Teichmüller, en particulier dans le cas de surfaces de translation non compactes. Cette situation a commencé à être abordée dans des travaux récents de Barak Weiss, Pascal Hubert, Pat Hooper... Mes travaux antérieurs contiennent certainement des idées utiles à cette étude.