

Feuille 9 - Espaces L^p

Exercice 1 (Examen de Juin 2002) Soit f une fonction borélienne dans $\mathcal{L}^2([0, 1])$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\int_0^1 x^n |f(x)| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \|f\|_2.$$

2. Montrer que

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} |f(x)| dx < \infty.$$

3. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} f(x) dx = \int_0^1 f(x) \log \frac{1}{1-x} dx.$$

Exercice 2 On pose $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{T}, \mu)$. Soit $p, q, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^p$, et $g \in \mathcal{L}^q$, alors $fg \in \mathcal{L}^r$ et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Exercice 3 Soit (X, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$. Montrer que pour $1 \leq p < q < \infty$ on a $\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^1$.

Exercice 4 Soit $l^p = \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ où m est la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On note $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de l^p , vu comme application de \mathbb{N} dans \mathcal{R} ou \mathcal{C} , dont la norme l^p est finie.

1. Constater que $x \in l^p$ signifie $\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^p < \infty$.

2. Pour $1 \leq p < q < \infty$, montrer que $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ et $l^1 \subset l^p \subset l^q \subset l^\infty$.

Exercice 5 Montrer que sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on a $\mathcal{L}^1 \setminus \mathcal{L}^2 \neq \emptyset$, $\mathcal{L}^2 \setminus \mathcal{L}^1 \neq \emptyset$ et $\mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^1 \neq \emptyset$.

Exercice 6 Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ et $p \geq 1$. Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la fonction $x \mapsto \frac{x^a}{1+x^b}$ est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+)$.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x(1+|\log x|)^2}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Est-ce que $f \in \mathcal{L}^p([0, 1])$? $\mathcal{L}^p([1, \infty[)$? $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+)$?

Exercice 8 Montrer que sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ est dense dans \mathcal{L}^1 et dans \mathcal{L}^2 .

Exercice 9 Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p < \infty$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$ on pose $f_h(x) = f(x-h)$. Montrer que $\|f_h - f\|_p \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. (Indication : on pourra d'abord considérer le cas où f est continue à support compact).

Exercice 10 1. Soit $f \in \mathcal{L}^2([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t) dt \right) = 0$.

Que se passe-t-il si $f \in \mathcal{L}^p([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, pour $p > 1$?

2. Soit $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x g(t) dt \right) = 0$.

Que se passe-t-il si $g \in \mathcal{L}^p([0, 1])$ ($p > 1$)?

Exercice 11 Soit (X, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré tel que μ soit σ -finie. Soit $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q$ avec $1 \leq p < q < +\infty$.

1. Montrer que pour tout $r \in [p, q]$ on a $|f|^r \leq |f|^p + |f|^q$.

2. Montrer que la fonction $N : r \mapsto \|f\|_r$ est continue sur $[p, q]$.

Exercice 12 On travaille sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathcal{L}^p([0, 1])$ pour tout $p \geq 1$ mais telle que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pour aucun $x \in [0, 1]$.