

Dans tout ce qui suit, nous appellerons mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$  la mesure produit  $\lambda \otimes \dots \otimes \lambda$  où  $\lambda$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 1.** 1) Montrer que tout ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est une union au plus dénombrable de pavés de la forme  $] \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^{n+1}} [^d$  avec  $k, n \in \mathbb{Z}$ .

2) Montrer que la tribu borélienne de  $\mathbb{R}^n$  est la tribu engendrée par les pavés ouverts et bornés, et donc

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

**Exercice 2.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable. Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures finies, définies sur  $\mathcal{T}$  et ayant même masse totale.

Montrer que  $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{T}; \mu(A) = \nu(A)\}$  est une classe monotone.

**Exercice 3.** Montrer que si  $\mu$  est une mesure borélienne sur  $\mathbb{R}$  invariante par translation, et telle que  $\mu([0, 1]) = 1$ , alors  $\mu([a, b]) = b - a$  et  $\mu(\{a\}) = 0$  pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ .

**Exercice 4.** Soit  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x^2 + y^2)(1 + z^2) \leq 1\}$ .

1) Montrer que  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ .

2) Calculer  $\mu(B)$  pour  $\mu = \delta_0 \otimes \delta_0 \otimes \delta_0, \delta_0 \otimes \delta_0 \otimes \lambda, \delta_0 \otimes \lambda \otimes \lambda, \lambda \otimes \lambda \otimes \lambda$ .

**Exercice 5.** Etudier l'intégrabilité des fonctions suivantes (où  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) :

$$\begin{array}{ll} f_1 : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(y) \end{array} \quad \begin{array}{ll} f_2 : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} f_3 : ]0, 1[^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x^y \end{array} \quad \begin{array}{ll} f_4 : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \frac{\sin(xy)}{xy} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} f_5 : ]0, +\infty[^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \frac{1}{(1+x+y)^\alpha} \end{array} \quad \begin{array}{ll} f_6 : ]0, 1[^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto \frac{1}{x+y^2+z^3} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} f_7 : ]0, 1[^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto \frac{1}{1-xyz} \end{array} \quad \begin{array}{ll} f_8 : ]0, 1[^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto \frac{yz}{x} \end{array}$$

**Exercice 6.** 1) Montrer que  $(x, y) \mapsto e^{-y} \sin(2xy)$  est intégrable sur  $[0, 1] \times [0, +\infty[$ .

2) En déduire la valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin y)^2}{y} e^{-y} dy$ .

**Exercice 7.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et} \\ f(0, 0) = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que l'on a

$$\int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 f(x, y) dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

b) Montrer que  $f$  n'est pas intégrable sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

c)  $f$  est-elle intégrable sur  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  ?

**Exercice 9.** Montrer en utilisant le Théorème de Tonelli que si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions positives mesurables sur  $(X, \mathcal{T}, \mu)$ , où  $\mu$  est une mesure  $\sigma$ -finie, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_X f_n d\mu \right) = \int_X \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right) d\mu.$$

*Application.* On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)e^{-n|x|}}{n^3 + x^2}.$$

- 1) Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Calculer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 11.** Soient  $a, b$  et  $L$  trois réels tels que  $0 < a < b$  et  $L > 0$ . Etudier l'intégrabilité de l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \sin(xy) \mathbf{1}_{[0, L] \times [a, b]}(x, y),$$

puis montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx = \ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

**Exercice 12.** 1) Etudier la continuité, la dérivabilité et le comportement à l'infini de la fonction  $F$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

2) Vérifier que  $F$  a la même dérivée que la fonction  $G$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$G(x) = - \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2,$$

et en déduire la valeur de  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

Pour tout réel  $t > 0$  et tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  posons  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$  et

$$f_t(x) = t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{t}}.$$

3) Calculer  $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x) dx$ .

4) Remarquer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_t(x) = 0$  et en déduire qu'il n'existe pas de fonction  $g$  intégrable sur  $\mathbb{R}^n$  telle que  $|f_t(x)| \leq g(x)$  pour tout  $(t, x)$  de  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n$ .

**Exercice 13.** Soit  $(E, \mathcal{T})$  un espace mesurable et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  mesurable.

1) Montrer que  $F : E \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  définie par  $F(x, y) = (f(x), y)$  est mesurable pour les tribus produits.

2) En déduire que les ensembles  $G = \{(x, y); y = f(x)\}$  et  $\Gamma = \{(x, y); 0 \leq y < f(x)\}$  sont dans la tribu produit  $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ .

3) Soient  $\mu$  une mesure  $\sigma$ -finie sur  $(E, \mathcal{T})$  et  $\lambda$  la mesure de Lebesgue de  $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ . Montrer que

$$\int_E f d\mu = \mu \otimes \lambda(\Gamma) = \int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f > y\}) d\lambda(y).$$