**Feuille d'exercices 6 - Intégrales à paramètre, Étude de fonctions définies par des intégrales**

**Exercice 1** Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $F$ définie sur $]0,+\infty[$ par $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}dx$ et calculer sa dérivée.

**Exercice 2** Soit, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x}{t}}dt$.
1) Vérifier que l'on définit ainsi une fonction continue sur $[0,+\infty[$.
2) Montrer que $F$ est dérivable en tout point $x > 0$.
3) Montrer que $F$ n'est pas dérivable à droite en 0. (On pourra montrer que $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = -\infty$).

**Exercice 3** Soient, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $f(t,x) = e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$.
1) Montrer que $F$ est une fonction continue vérifiant $F(-x) = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2) Soient $b > a > 0$. Montrer que l'on a

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \leq \frac{2b}{t^2}e^{-t^2-\frac{a^2}{t^2}} \quad \forall (x,t) \in [a,b]\times]0,\infty[.$$

En déduire que $F(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donner une expression de $F'$.
3) Montrer que $F$ satisfait une équation différentielle sur $]0,+\infty[$. En déduire l'expression de $F$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 4** Montrer que l'on définit une fonction infiniment dérivable sur $]0,+\infty[$ par

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(xt)dx$$

Trouver l'expression explicite de $F$.

**Exercice 5** Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{ixe^{i\theta}}d\theta$ pour $x \in [0,+\infty[$.
1) Montrer que $f$ est dérivable et calculer $f'$ explicitement.
2) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(r)}{r}dr$.

**Exercice 6** Soit $f(x)$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$. Pour quelles valeurs de $x$ $f$ est-elle définie? À l'aide du théorème de dérivation sous le signe somme, exprimer $f'(x)$ et en déduire l'identité $f(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{dt}{1-e^t}$ pour $x > 0$.

**Exercice 7** Soit, pour $t > 0$, $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t+x^2}dx$.
1) Montrer que $F$ est infiniment dérivable sans calculer l'intégrale.
2) Calculer $F$ et ses dérivées. En déduire la valeur des intégrales $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 8** 1) Montrer que $\int_0^t \frac{\sin(x)}{x}dx$ et $\int_0^t \frac{\cos(x)}{x}dx$ ont une limite quand $t$ tend vers $+\infty$. On note $M = \lim_{t\to\infty} \frac{\sin x}{x}$.
2) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pourra utiliser le fait que $|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.
3) Soit $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\sin t dt$, $\alpha > 0$. Montrer que $I(\alpha)$ existe pour tout $\alpha > 0$ et que $I(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}$.
4) Soit $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}\sin t}{t}dt$, $\alpha > 0$. Montrer que $J(\alpha)$ existe pour tout $\alpha > 0$.
5) Montrer que $J(\alpha)$ a une limite quand $\alpha$ tend vers $+\infty$. Calculer cette limite.
6) Montrer que $J(\alpha)$ est dérivable. Calculer $J'(\alpha)$ et en déduire la valeur de $J(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.
7) Montrer que $J(\alpha)$ converge vers $M$ quand $\alpha$ tend vers 0. En déduire la valeur de $M$.

**Exercice 9 (Session de septembre 2003)** Soient $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions définies respectivement par

$$F(x)=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt, \qquad \text{et} \qquad G(x)=-\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt\right)^2.$$

1. Étudier la continuité, la dérivabilité et le comportement à l'infini de la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $F$ a la même dérivée que la fonction $G$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$.

**Exercice 10** Soit $f(x)$ la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n}$ pour $x>0$. À l'aide du théorème de dérivation sous la somme, exprimer $f'(x)$ et en déduire l'identité

$$f(x)=-\int_x^{+\infty}\frac{dt}{1-e^t}, \qquad \text{pour tout } x>0.$$

**Exercice 11** Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $F$ définie sur $]0,+\infty[$ par $F(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xa)}{x(1+x^2)}dx$ et calculer sa dérivée.

**Exercice 12** Soit $F(x)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xy}{y(y^2+1)}dy.$

1. Montrer que $F$ est continue, dérivable et que sa dérivée est continue sur $[0,\infty[$
2. Majorer $\int_A^\infty \frac{y\sin xy}{y^2+1}dy$ pour $A>1$ et $x>0$ et en déduire que $F$ est 2 fois continuement dérivable sur $]0,\infty[$.
3. En déduire que $F$ est solution, sur $[0,\infty[$, d'une équation différentielle que l'on écrira
4. Montrer que $F(x)=\frac{\pi}{2}(1-e^{-x})$.

**Exercice 13** On pose $F(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(ax)dx.$
Montrer que $F$ est de classe $C^\infty$ sur $[0,+\infty[$. Expliciter $F$.

**Exercice 14** Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction mesurable et $x_0\in\mathbb{R}$.
On suppose: a) $f$ est intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}^+$
b)$t\to e^{-tx_0}f(t)$ est bornée au voisinage de $+\infty$

1)Montrer que l'application $F:x\to\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-tx}f(t)dt$ est définie et continue sur $]x_0,+\infty[$.
2)Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$.
3)Etablir que $F$ est de classe $C^1$ sur $]x_0,+\infty[$.
4)Montrer brièvement que $F$ est $C^\infty$ sur $]x_0,+\infty[$ et donner l'expression de $F^{(p)}$.