

### Feuille d'exercices 4. Mesures et mesure de Lebesgue.

#### Mesures.

**Exercice 1** Soit  $X$  un ensemble non vide. Décrire toutes les mesures sur la tribu grossière  $\{\emptyset, X\}$ .

**Exercice 2** a) Soit  $X$  un ensemble muni d'une tribu  $\mathcal{A}$ . Pour toute partie  $A \in \mathcal{A}$  de  $X$ , posons  $\mu(A) = \text{Card}(A)$  si  $A$  est un ensemble fini et  $\mu(A) = +\infty$  sinon. Vérifier que  $\mu$  définit une mesure positive sur  $(X, \mathcal{A})$ , appelée la *mesure de décompte, ou de comptage, sur  $X$* .

b) Soit  $m : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ . On pose  $\mu(A) = \sum_{x \in A} m(x)$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ . Vérifier que c'est une mesure positive, et que la mesure de décompte sur  $X$  est la mesure associée à la fonction définie par  $m(x) = 1$  pour tout  $x \in X$ .

**Exercice 3** Soit  $P$  une mesure de probabilité sur  $(X, \mathcal{A})$ , et  $A, B$  deux ensembles mesurables (i.e. dans  $\mathcal{A}$ ). On suppose  $P(A) = 3/4$  et  $P(B) = 1/3$ . En déduire que  $1/12 \leq P(A \cap B) \leq 1/3$ .

**Exercice 4** Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \rightarrow Y$  une application.

a) On pose  $\mathcal{B} := f_*\mathcal{A} = \{B \in Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ . Vérifier que  $\mathcal{B}$  est une tribu et montrer que

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{B} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ B &\mapsto \mu(f^{-1}(B)). \end{aligned}$$

définit une mesure sur  $(Y, \mathcal{B})$ , appelée *mesure image de  $\mu$  par  $f$*  et notée  $f_*\mu$ .

b) Déterminer la mesure image  $\nu = f_*\mu$  dans le cas où  $\mu = \delta_a$  est la mesure de Dirac au point  $a \in X$ .

c) Soit  $g : Y \rightarrow Z$  une application. Montrer que

$$(g \circ f)_*(\mu) = g_*(f_*(\mu)).$$

**Exercice 5** Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$ .

1. Montrer que  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$  et  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$  appartiennent à  $\mathcal{A}$ .
2. Montrer que  $\mu(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ .
3. Montrer que si  $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$  est finie alors  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \mu(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n)$ .
4. En déduire que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$  existe (i.e.  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ ) alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n)$ .

**Exercice 6** Soit  $X$  un ensemble, on considère la tribu  $\mathcal{P}(X)$  sur  $X$ , et la mesure de Dirac  $\delta_a$  en  $a \in X$ .

1. Soit  $A \in \mathcal{P}(X)$ . Que signifie  $\delta_a(A) > 0$ ?
3. Déterminer la classe des parties  $\delta_a$ -négligeables de  $X$ ,
4. Expliciter à quelle condition une propriété est vraie  $\delta_a$ -presque-partout.
- 5.. A t-on  $e^{\cos(x^2)-1} = \mathbf{1}_{\{0\}}(x)$  pour  $\delta_0$  presque tout  $x \in \mathbb{R}$  ?

**Exercice 7** 1) Soit  $(\mu_i)_{i \in I}$  une famille de mesures sur  $(X, \mathcal{B})$ .

Montrer que  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  définie par

$$\mu(B) = \sum_{i \in I} \mu_i(B), \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{B},$$

est une mesure sur  $(X, \mathcal{B})$ .

2) Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^+$ . Soit  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  définie par  $\mu(E) = \sum_{n \in E} a_n$  pour  $E \subset \mathbb{N}$ .

Montrer que  $\mu$  définit une mesure  $\sigma$ -finie.

**Exercice 8 a)** Soit  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ . Soit  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par  $P(A) = \frac{1}{6}\#A$ . Vérifier que c'est une mesure, appelée *probabilité uniforme sur X*. (Une probabilité est une mesure positive telle que  $P(X) = 1$ ).

b) Plus généralement, si  $X$  est un ensemble fini, comment définit-on une probabilité uniforme sur  $X$  ?

c) Soit  $A = \{2, 4, 6\}$  l'événement "obtenir un chiffre pair". Montrer que l'application  $P(\cdot|B) : B \in \mathcal{P}(A) \mapsto P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$  est une mesure de probabilité sur  $(A, \mathcal{P}(A))$ .

d) Soit  $X = \mathbb{N}$ . Existe-t-il une mesure de probabilité uniforme sur  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ?

### Mesure de Lebesgue.

**Exercice 9** Montrer qu'il n'existe pas de mesure non nulle sur  $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ , finie et invariante par translation.

**Exercice 10** Montrer que la mesure  $\lambda(I)$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  est égale à sa longueur. (*Commencer par les intervalles de longueur entière, puis de longueur inverse d'un entier non nul, puis de longueur rationnelle et enfin quelconque.*)

De la même manière, montrer que la mesure  $\lambda(I_1 \times \cdots \times I_n)$  d'un pavé de  $\mathbb{R}^n$  (les  $I_k$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ ) est égale à son volume.

**Exercice 11** Que vaut la mesure  $\lambda([0, 1]^k)$  où  $[0, 1]^k \subset \mathbb{R}^n$  est un pavé de dimension  $0 < k < n$ ? En déduire la mesure  $\lambda(\mathbb{R}^k)$ , avec  $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$  un  $k$ -plan ( $k < n$ ).

**Exercice 12** On se place dans  $\mathbb{R}$  muni de la tribu de Lebesgue  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  et de la mesure de Lebesgue  $\lambda$ . Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. Si  $a \in \mathbb{R}$  alors  $\lambda(\{a\}) = 0$ . Que peut-on dire de  $\lambda(\mathbb{Q})$ ?
2. Si  $U$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{R}$  alors  $\lambda(U) > 0$ .
3. Si  $A$  est une partie mesurable telle que  $\lambda(A) > 0$  alors il existe un ouvert non vide contenu dans  $A$ .
4. Si  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}$  alors  $K$  est mesurable et  $\lambda(K) < \infty$ .
5. Si  $A$  est une partie mesurable telle que  $\lambda(A) < \infty$  alors il existe un compact  $K$  tel que  $A \subset K$ .
6. Si  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$  telle que  $A \subset B$ , où  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ , alors  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ .

**Exercice 13** On reprend la construction du cantor  $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$  de la feuille 2. Calculer la mesure de Lebesgue de  $K_n$ , puis de  $K$ .

**Exercice 14** Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Construire un ouvert de  $\mathbb{R}$  de mesure de Lebesgue au plus  $\varepsilon$  et qui soit dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 15** Soient  $E \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$  et  $r \in \mathbb{R}^*$ . On note  $rE = \{rx, x \in E\}$ . On veut montrer que  $\lambda(rE) = |r|\lambda(E)$ .

Montrer cette relation lorsque  $E$  est un intervalle, puis un ouvert de  $\mathbb{R}$ , puis un borélien de  $\mathbb{R}$ , puis un ensemble quelconque de  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ .

**Exercice 16** Soit  $R$  la relation d'équivalence définie par :

$$xRy \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

1. On admet qu'il existe  $A \subset [0, 1]$  tel que tout  $x \in \mathbb{R}$  soit équivalent à un unique point de  $A$  (ceci nécessite d'utiliser l'axiome du choix).
2. Montrer que si  $u, v \in \mathbb{Q}$ ,  $u \neq v$ , alors  $(A + u) \cap (A + v) = \emptyset$ .
3. Supposons  $A$  mesurable, préciser la mesure de Lebesgue de

$$B = \bigcup_{u \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (A + u)$$

en fonction de la mesure de  $A$ .

4. Vérifier que  $[0, 1] \subset B \subset [-1, 2]$  et en déduire que  $A$  n'est pas Lebesgue mesurable.