

**Feuille d'exercices 3. Tribus, fonctions mesurables**

**Tribus**

**Exercice 1** Soit  $X = \{1, 2, 3\}$ . Décrire l'ensemble  $\mathcal{P}(X)$ , puis toutes les tribus de  $X$ . Trouver une tribu  $\mathcal{B}$  et une application  $f : X \rightarrow X$  telle que  $f(\mathcal{B})$  n'est pas une tribu.

**Exercice 2** Soit  $E$  un ensemble. L'ensemble des parties finies de  $E$  est-il une tribu?

**Exercice 3** Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux tribus de  $\mathbb{R}$  et  $C \subset \mathbb{R}$ .

(a) Les familles suivantes sont-elles des tribus ?

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \{A : A \in \mathcal{B} \text{ et } A \in \mathcal{B}'\}, \quad \mathcal{B} \cup \mathcal{B}' = \{A : A \in \mathcal{B} \text{ ou } A \in \mathcal{B}'\}.$$

(b) La famille suivante est-elle une tribu de  $\mathbb{R}^2$ ?

$$\mathcal{B} \times \mathcal{B}' = \{A \times A' : A \in \mathcal{B} \text{ et } A' \in \mathcal{B}'\}.$$

(c) Montrer que la famille suivante est une tribu sur  $C$ . Elle est appelée *tribu induite* sur  $C$ .

$$\{A \cap C, A \in \mathcal{B}\}.$$

**Exercice 4** 1) Soient  $f : X \rightarrow Y$  une application entre deux ensembles et  $\mathcal{B}$  une tribu sur  $Y$ .

Vérifier que  $f^*\mathcal{B} = \{f^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}$  est une tribu sur  $X$ , appelée *image réciproque* de  $\mathcal{B}$  par  $f$ .

Trouver un exemple tel que  $\{f(A), A \in \mathcal{B}\}$  n'est pas une tribu.

2) Soient  $f : X \rightarrow Y$  une application entre deux ensembles et  $\mathcal{A}$  une tribu sur  $X$ .

Vérifier que  $f_*\mathcal{A} = \{B \subset Y | f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$  est une tribu sur  $Y$ , appelée *image directe* de  $\mathcal{A}$  par  $f$ .

**Exercice 5** Une *partition finie* d'un ensemble  $X$  est une collection finie d'ensembles  $\alpha = \{A_1, \dots, A_n\}$  telle que

$$X = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \text{et} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

Montrer que la tribu engendrée par la partition  $\alpha$  est  $\left\{ \bigcup_{i \in J} A_i, J \subset \{1, \dots, n\} \right\}$ .

**Exercice 6**

1) Vérifier que les parties au plus dénombrables et leurs complémentaires constituent une tribu  $\mathcal{A}$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) Montrer que  $\mathcal{A}$  est la tribu engendrée par les singletons  $\{x\}$ .

**Exercice 7** Décrire la tribu engendrée sur  $\mathbb{R}$  par les intervalles  $]n, +\infty[$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 8** Justifier quelles sont les assertions suivantes qui sont vraies, et lesquelles sont fausses

- \* Un fermé de  $\mathbb{R}$  est un borélien
- \* Un fermé de  $\mathbb{R}$  est un ouvert
- \* Un ouvert de  $\mathbb{R}$  est un borélien
- \* Un ouvert de  $\mathbb{R}$  est mesurable
- \*  $\mathbb{Q}$  est fermé dans  $\mathbb{R}$
- \*  $\mathbb{Q}$  est ouvert dans  $\mathbb{R}$
- \*  $\{x\}$  pour  $x \in \mathbb{R}$  est un borélien.
- \*  $\mathbb{Q}$  est un borélien de  $\mathbb{R}$
- \*  $\mathbb{N}$  est un borélien de  $\mathbb{R}$ .
- \* Un ensemble dénombrable est un ouvert de  $\mathbb{R}$ .
- \* Un ensemble dénombrable est un borélien de  $\mathbb{R}$ .
- \*  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est fermé dans  $\mathbb{R}$
- \*  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est un borélien de  $\mathbb{R}$

**Exercice 9**

1) Montrer que  $]a, +\infty[ = \bigcap_n ]a_n, +\infty[$  quand  $(a_n)_n$  est une suite croissante convergeant vers  $a \in \mathbb{R}$ .

2) Montrer que  $]a, +\infty[ = \bigcup_n ]a_n, +\infty[$  quand  $(a_n)_n$  est une suite décroissante convergeant vers  $a \in \mathbb{R}$ .

3) Notons  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$ . Montrer que la tribu borélienne  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  est engendrée par les intervalles de la forme  $]a, +\infty[$ , avec  $a \in \mathbb{R}$ .

4) Montrer que tout ouvert de  $\mathbb{R}^d$  est une union au plus dénombrable de pavés de la forme  $] \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^{n+1}} [^d$  avec  $k, n \in \mathbb{Z}$ .

5) Montrer que la tribu borélienne de  $\mathbb{R}^d$  est la tribu engendrée par les pavés ouverts et bornés.

## Fonctions mesurables et boréliennes

**Exercice 10** Montrer que l'image d'une partie mesurable par une application mesurable n'est pas toujours mesurable.

**Exercice 11** Soit  $f$  une fonction de l'espace mesurable  $(X, \mathcal{T})$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , où  $\mathcal{B}$  est la tribu des boréliens de  $\mathbb{R}$ . Caractériser les fonctions  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mesurables lorsque  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$  et lorsque  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ .

**Exercice 12** Soit  $\mathcal{A}$  la classe des sous-ensembles  $A$  de  $\mathbb{Z}$  tels que, pour  $n > 0$ ,  $2n \in A$  ssi  $2n + 1 \in A$ .

(a) Montrer que  $\mathcal{A}$  est une tribu sur  $\mathbb{Z}$ .

(b) Montrer que l'application  $n \mapsto n + 2$  est une bijection mesurable de  $(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$  vers  $(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$  mais que son inverse n'est pas mesurable.

**Exercice 13** Si  $A$  est un ensemble mesurable de  $\mathcal{T}$  tel que  $B \in \mathcal{T}$  et  $B \subset A$  entraîne que  $B = \emptyset$  ou  $B = A$ , montrer que toute fonction  $\mathcal{T}$ -mesurable est constante sur  $A$ . En particulier, si  $\mathcal{T}$  est engendrée par une partition, une fonction mesurable est constante sur chaque ensemble de la partition.

**Exercice 14** Soient  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction, et  $\mathcal{A}$  une tribu de  $X$ .

Montrer que  $f$  est mesurable si et seulement si  $Re(f) : X \rightarrow \mathbb{C}$  et  $Im(f) : X \rightarrow \mathbb{C}$  sont mesurables.

**Exercice 15** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable et  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  des applications mesurables.

1) Montrer que les fonctions  $x \mapsto \max(f(x), g(x))$  et  $x \mapsto \min(f(x), g(x))$  sont mesurables.

2) Montrer que les ensembles suivants sont dans  $\mathcal{T}$ :

$$A = \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}, \quad B = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}, \quad C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

En déduire que l'ensemble  $\{x \in \mathbb{Q}, e^{x \cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sin x)^{n^2}}{n!}\}$  est un borélien de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 16** Soit  $f$  une fonction mesurable à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la *troncature*  $f_n$  de  $f$  de niveau  $n$  par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } f(x) > n \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq n \\ -n & \text{si } f(x) < -n. \end{cases}$$

Faire un dessin, puis montrer que  $f_n$  est mesurable et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 17** Les applications suivantes sont-elles boréliennes ?

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n 1_{[n, n+1[}(x)$$

**Exercice 18** Soit  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Montrer que  $f'$  est borélienne.

**Exercice 19** Montrer que toute fonction croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est borélienne.

**Exercice 20** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable et  $(f_n : X \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble des  $x \in X$  pour lesquels  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente est mesurable.