Feuille d'exercices 2. Dénombrabilité. Sommabilité. Rappels sur l'intégrale de Riemann.

Dénombrabilité

Un ensemble est dit au plus dénombrable *s'il est fini ou dénombrable.*

Exercice 1 **(a)** Montrer que l'ensemble des lettres de l'alphabet latin est au plus dénombrable. Est-il dénombrable?
(b) Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
(c) Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
(d) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice 2 Montrer que l'anneau $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable.

Exercice 3 Deux ensembles A et B sont dits *équipotents* s'il existe une bijection de A dans B.
(a) Soit A un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. Montrer que A est équipotent à $\mathbb{N}$.
(b) Montrer qu'un ensemble X est au plus dénombrable s'il existe une injection de X dans $\mathbb{N}$.

Exercice 4 (Théorème de Cantor[1]-Bernstein) Démontrons le **Théorème :** *A et B sont équipotents si et seulement s'il existe une injection f de A dans B et une injection g de B dans A.*
(1) Quelle est la seule implication non évidente?
(2.a) On commence naïvement. On utilise seulement f et on pose $b_1(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. Quel est le problème?
(2.b) On modifie b_1 sur $g(B \setminus f(A))$ en posant $b_2(x) = g^{-1}(x)$ si $x \in g(B \setminus f(A)$ et $b_2(x) = b_1(x) = f(x)$ sinon. Cette application est-elle bijective? Pourquoi? Dessin.
(2.c) On continue le processus. On modifie b_2 sur $g \circ f \circ g(B \setminus f(A))$ en posant $b_3(x) = g^{-1}(x)$ si $x \in g \circ f \circ g(B \setminus f(A))$, et $b_3(x) = b_2(x)$ sinon. Commentaire ?
(3) Considérons l'ensemble $A_1 := \{x \in A, \exists k \in \mathbb{N}, x \in (g \circ f)^{(\circ k)} \circ g(B \setminus f(A)\}$ et A_2 son complémentaire. On pose $b(x) = f(x)$ sur A_2 et $b(x) = g^{-1}(x)$ sur A_1. Montrer que b est bijective.
NB: soit $x \in A$. Considèrons la suite, finie ou infinie, $x, g^{-1}(x), f^{-1} \circ g^{-1}(x), g^{-1} \circ f^{-1} \circ g^{-1}(x), \ldots$. La suite s'arrête si le terme suivant n'est plus défini. A_2 est l'ensemble des $x \in A$ pour lesquels cette suite est infinie ou s'arrête dans A, et $A_1 = A \setminus A_2$ l'ensemble des $x \in A$ pour lesquels elle s'arrête dans B.

Exercice 5 Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. En déduire que l'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 6 Soit E un ensemble non-vide. Montrer qu'il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E. *Indication: Pour $f : E \to \mathcal{P}(E)$, considérer $\{x \in E | x \notin f(x)\} \subset E$.*

En déduire que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

Exercice 7 a) Montrer que $\mathbb{R}$ est équipotent à la demi-droite $]0, +\infty[$.
b) Montrer que les demi-droites $[0, +\infty[$ et $]0, +\infty[$ sont équipotentes.
c) Montrer plus généralement l'équipotence de tous les intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$.

Exercice 8 On veut montrer le *Théorème : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ en lesquels f est discontinue est au plus dénombrable.*
(a) Soient x_1 et x_2 deux points en lesquels f est discontinue. Montrer que les intervalles ouverts $]\lim f_{x\to x_1^-}, \lim f_{x\to x_1^+}[$ et $]\lim f_{x\to x_2^-}, \lim f_{x\to x_2^+}[$ sont disjoints et non vides.
(b) Construire une application injective de l'ensemble des points de discontinuité de f dans $\mathbb{Q}$. Conclure.

Exercice 9 (L'ensemble triadique de Cantor) Nous allons construire un ensemble compact non vide, d'intérieur vide, et non dénombrable de l'intervalle $[0, 1]$.

Soit $I = [0, 1]$. On construit une suite d'ensembles K_n, $n \in \mathbb{N}$, de la manière suivante. $K_0 = I = [a_0, b_0]$, puis $K_1 = [a_0, \frac{b_0 - a_0}{3}] \cup [2\frac{b_0 - a_0}{3}, 1]$, puis, par récurrence, si K_n est l'union d'intervalles disjoints $[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$ pour $0 \leq k \leq 2^n$, alors K_{n+1} est l'union des intervalles $[a_k^{(n)}, \frac{b_k^{(n)} - a_k^{(n)}}{3}]$ et des intervalles $[2\frac{b_k^{(n)} - a_k^{(n)}}{3}, b_k^{(n)}]$. On pose ensuite $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.
(a) Montrer que K est un compact (i.e. fermé et borné) non vide de $[0, 1]$.
(b) Montrer que K est *négligeable*, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille au plus dénombrable d'intervalles *ouverts* disjoints I_n tels que $K \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} l(I_n) \leq \varepsilon$.
(c) En déduire que K est d'intérieur vide.
(d) Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que $x \in K$ ssi x admet un développement en base 3 qui ne comporte que des 0 et des 2.
(e) En déduire que K n'est pas dénombrable.

Familles sommables

Exercice 10 Les familles suivantes sont-elles sommables :

(a) $(x)_{x\in[0,1]}$ **(b)** $(x)_{x\in\mathbb{Q}}$ **(c)** $(\frac{1}{x^2})_{x\in\mathbb{Q}_+^*}$ **(d)** $(x^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ **(e)** $\left(\dfrac{1}{a^p+b^q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ pour $(a,b)\in]1,+\infty|$

Exercice 11 Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Si cette famille est sommable, montrer que $\{i\in I, u_i\neq 0\}$ est au plus dénombrable. Montrer que le résultat reste vrai pour une famille de nombres réels de signe quelconque.

Intégrale de Riemann [2]

Exercice 12 Si $n\geq 1$, on pose $S_n=\sqrt{1}+\cdots+\sqrt{n}$. Montrer que $S_n\sim\frac{2}{3}n\sqrt{n}$.

Exercice 13 Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots 2n}$.

Exercice 14 Montrer que S_n est une somme de Riemann relativement à une fonction f que l'on précisera, puis déterminer la limite de (S_n).

(a) $S_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+4}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$ **(b)** $S_n=\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+4}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$

Exercice 15 (Intégrales de Wallis) Calculer pour tout $n\in\mathbb{N}$ l'intégrale $I_n=\int_0^{\pi/2}(\cos t)^n\,dt$.

Exercice 16 (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $I_n=\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)dt$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$,

(a) lorsque f est en escalier.
(b) Lorsque f est continue par morceaux.

Exercice 17 Si $A\subset\mathbb{R}$, on note $\mathbf{1}_A$ la *fonction caractéristique* de A, i.e. la fonction valant 1 sur A et 0 ailleurs. Si $n\geq 0$, on définit la fonction $f_n=\mathbf{1}_{A_n}$, où $A_n=\{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1],\ x=\dfrac{p}{q},\ (p,q)=1,\ p\leq q,\ p+q\leq n\}$.

a) Montrer que f_n est Riemann-intégrable, calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ puis $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$.
b) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Montrer (en utilisant la définition) que cette fonction n'est pas Riemann-intégrable. Commenter.

Exercice 18 Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $]0,1]$ par $f_n(x)=n.\mathbf{1}_{]0,\frac{1}{n}[}$.
Comparer $\displaystyle\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Exercice 19 Soit $f_n(x)=x^n$. Calculer $\int_0^1 f_n(x)\,dx$, puis $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, mais pas uniformément vers la fonction définie par $f(x)=\mathbf{1}_{\{1\}}$. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$. Commenter.

Exercice 20 **(a)** Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx$ converge.
(b) Montrer qu'en revanche, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx$ diverge.
(c) Vérifier que $\displaystyle\left|\int_1^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx\right|\leq 2$ (on pourra faire une intégration par parties).
(d) Soit (f_n) la suite de fonctions sur $[1,+\infty[$ définies par $f_n(x)=\frac{\sin x}{x}$ si $x\in[1,n]$ et $f_n(x)=\frac{n}{x^2}(10-\int_1^n\frac{\sin x}{x}\,dx)$ sinon. Comparer $\displaystyle\int_1^{+\infty}\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^{+\infty}f_n(x)\,dx$.

Exercice 21 Soit $T>0$ et $f:[0,T]\to\mathbb{C}$ continue. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $t\in[0,T]$, soit $g_n(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^T f(u)e^{-kn(t-u)}du$.

(a) Justifier l'existence de $g_n(t)$ pour $t\in[0,T]$.
(b) Étudier la limite simple de la suite (g_n) quand $n\to+\infty$.

Face à ce genre d'expression, le premier réflexe, au brouillon et sans justification préalable, doit être d'intervertir série et intégrale. Ensuite seulement, on justifie le calcul par des théorèmes du cours.

Exercice 22 (La fonction Γ d'Euler) Posons $\Gamma(x):=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\,dt$.

(a) Quel est son ensemble de définition ?
(b) Montrer qu'elle est continue, puis dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (énoncer précisément les résultats utilisés).
(c) Montrer que $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ pour tout $x>0$ et $\Gamma(n+1)=n!$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

[2] Il s'agit de **rappels**. La définition de l'intégrale, les sommes de Riemann, l'intégration par parties, le changement de variables, les primitives des fonctions usuelles, les théorèmes d'interversion limite-intégrale, l'étude de fonctions définies par une intégrale, les intégrales semi-convergentes, ... sont des notions (liste non exhaustive!) à réviser et maitriser