

## Feuille d'exercices 10 - Convolution

Dans ce qui suit, contrairement à la convention du cours, on pose

$$C_0(\mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C} \text{ continue; } \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = 0\}$$

**Exercice 1.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $\lambda$ -intégrables sur  $\mathbb{R}$ .

- 1) Montrer que  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .
- 2) Étudier la parité de  $f * g$  en fonction des parités de  $f$  et  $g$ .

**Exercice 2.** Soit  $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ . Montrer que  $f * f$  est continue puis calculer explicitement  $f * f$ .  
Même question pour  $f * f * f$ .

**Exercice 3.** Soient  $a$  et  $b$  dans  $]0, +\infty[$ . Considérons les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_a(x) = \mathbf{1}_{[-a,a]}(x) \quad \text{et} \quad g_a(x) = e^{-a|x|}.$$

- 1) Montrer que  $f_a * f_b \in C_0(\mathbb{R})$  puis calculer explicitement  $f_a * f_b$ .
- 2) Montrer que  $g_a * g_b \in C_0(\mathbb{R}) \cap \bigcap_{p \in [1, +\infty[} L^p(\mathbb{R})$  puis calculer explicitement  $g_a * g_b$ .

**Exercice 4.** Soit  $a > 0$ . Considérons les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_a(x) = \frac{1}{x - ia} \quad \text{et} \quad g_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}.$$

- 1) Montrer que  $f_a \in L^2(\mathbb{R}^2)$ .
- 2) Montrer que  $f_a * f_b \in C_0(\mathbb{R})$  pour tout  $(a, b) \in ]0, +\infty[^2$ .
- 3) Déterminer explicitement  $f_a * f_b$ .
- 4) Montrer que  $g_a * g_b \in C_0(\mathbb{R}) \cap \bigcap_{p \in [1, +\infty[} L^p(\mathbb{R})$ .
- 5) En utilisant le calcul de  $f_a * f_b$  montrer que  $g_a * g_b = g_{a+b}$ .

**Exercice 5.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , bornées, et dont les dérivées sont bornées. On suppose que  $f$  et  $g'$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ .  
Montrer que  $f * g$  est bien définie et qu'elle est de classe  $C^2$ .

**Exercice 6.** Soit  $f \in L^p(\mathbb{R})$  où  $p \in [1, +\infty[$ . On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{[x, x+1]} f(y) d\lambda(y).$$

- 1) Montrer que  $F$  est bien définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- 2) Trouver  $g$  telle que  $F = f * g$ .
- 3) Montrer que si  $p > 1$  alors  $F \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ .
- 4) Montrer que si  $p = 1$  alors  $F \in C_0(\mathbb{R}) \cap \bigcap_{q \in [1, +\infty[} L^q(\mathbb{R})$ .

**Exercice 7.** Le but de cet exercice est de montrer que  $L^1(\mathbb{R}^n)$  est un anneau non unitaire, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'élément neutre pour la loi  $*$ . Supposons qu'il en existe un, noté  $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Soit  $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$  telle que  $f * u = u * f = f$   $\lambda_n$ -presque partout pour toute  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Nous noterons  $B(r)$  la boule euclidienne de rayon  $r$ .

- 1) Montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $\int_{B(2\delta)} |u| d\lambda_n < 1$ .

2) Montrer que  $\mathbf{1}_{B(\delta)}(t) = \int_{B(\delta)+t} u d\lambda_n$  pour  $\lambda_n$ -presque tout  $t \in \mathbb{R}^n$ .

3) Obtenir une contradiction et conclure qu'un tel  $u$  n'existe pas.

**Exercice 8.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $\delta_a$  la masse de Dirac en  $a$ .

1) Montrer que  $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ .

2) Pour  $m \geq 1$  un entier, et  $p \in [0, 1]$ , on considère la mesure (appelée loi binomiale)

$$B(m, p) = \sum_{k=0}^m C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \delta_k.$$

Montrer que  $B(m, p) = B(1, p) * B(1, p) * \dots * B(1, p)$ .