

Feuille d'exercices 1. Ensembles, opérations ensemblistes, sup, inf, limites inf et sup

Certains exercices sont des exercices d'entraînement à faire chez soi (ceci sera précisé en TD).

Ensembles et opérations ensemblistes¹

Exercice 1 Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application, $\{A_j\}_{j \in J}$ et $\{B_i\}_{i \in I}$ deux familles de sous-ensembles de respectivement E et F indexées par deux ensembles I et J (éventuellement infinis).

Pour $A \subset E$ (resp. $B \subset F$) une partie de E (resp. F), on définit l'image directe de A par $f(A) = \{f(x), x \in A\}$, et l'image réciproque de B par $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.

1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$. Déterminer les images directes de \mathbb{R} , de $[-\pi/2, \pi/2]$, de $[0, \pi/2]$, de $[0, \pi]$, puis les images réciproques de \mathbb{R} , de $[-3, -2]$, de $[-1, 1]$, de $[0, 1]$. Remarque: f est elle inversible ? Commenter.

2) Montrer que l'on a

$$f\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \bigcup_{j \in J} f(A_j) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \subset \bigcap_{j \in J} f(A_j).$$

3) Montrer que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i), \quad \text{puis}$$

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A).$$

4) La différence symétrique des ensembles A et B est définie par $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Comparer $f(A \Delta B)$ et $f(A) \Delta f(B)$ puis $f^{-1}(A \Delta B)$ avec $f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$.

Exercice 2 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer les équivalences suivantes.

- f surjective si et seulement si pour tout $B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B$
- f injective ssi pour tout $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) = A$
- f injective ssi pour tous $A \subset E, B \subset E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- f bijective ssi pour tout $A \subset E$, $(f(A))^c = f(A^c)$

Exercice 3 Soit X un ensemble, et $A \subset X$. La fonction indicatrice de A est la fonction $\mathbf{1}_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \in A^c$.

(a) Déterminer $\mathbf{1}_\emptyset$ et $\mathbf{1}_X$.

(b) Quelles sont les images réciproques $(\mathbf{1}_A)^{-1}(Y)$ des parties de \mathbb{R} ?

(c) Soient A et B deux parties de X . Exprimer les fonctions indicatrices de $A^c, A \cup B, A \cap B, A \Delta B$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.

(d) Soit $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ une application. Construire un ensemble $A \subset X$ tel que $f = \mathbf{1}_A$.

(e) Soit $f : X \rightarrow Y$ une application, $A \subset X$ un ensemble. Quelle relation y a-t-il entre les indicatrices de A et $f(A)$?

Exercice 4 (Limites supérieures et inférieures de suites d'ensembles) Soit E un ensemble, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n \subset E$ une partie de E . La limite supérieure de la suite d'ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'ensemble, noté $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ ou $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$, des $x \in E$ qui appartiennent à une infinité de A_n . La limite inférieure de la suite d'ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'ensemble $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ des $x \in E$ qui appartiennent à tous les A_n à partir d'un certain rang.

a) Montrer que $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k$ et $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k$.

b) Montrer que $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$, et $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n)^c = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n)^c$.

Exercice 5 Dans chacun des exemples suivants, calculez les ensembles suivants : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ quand elle existe.

- $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, avec F, G deux sous-ensembles d'un ensemble E ,
- $A_n = [0, \frac{1}{n+1}]$
- $A_n = [x, y - \frac{1}{n}]$, $n \geq 1$
- $A_n = [x, y - \frac{1}{n}[$ $n \geq 1$
- $A_n = [x + \frac{1}{n}, y]$ $n \geq 1$
- $A_n =]x - \frac{1}{n}, y]$ $n \geq 1$
- $A_n = B(O, \frac{1}{n+1}) \subset \mathbb{R}^2$
- $A_n = n\mathbb{Z}$

¹On ne vous a jamais défini les ensembles. Intuitivement, un ensemble est une collection d'objets, appelés ses éléments. On peut ensuite définir la réunion, l'intersection, la différence symétrique d'ensembles, un sous-ensemble (ou partie) d'un ensemble, le complémentaire d'un ensemble à l'intérieur d'un autre, et aussi l'ensemble vide, qui n'a aucun élément.

Bornes inférieure et supérieure d'un ensemble ²

Exercice 6 On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup -\infty, +\infty$ la droite réelle complétée. Trouver les bornes supérieure et inférieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) des parties suivantes:

$$A = \{n^{-1}, n > 0\}$$

$$B = \{2^{-(n+1)}(1 + (-1)^n) + 3^n(1 + (-1)^{n+1}), n \geq 0\}$$

$$C = \{2^{-(n+1)}(1 + (-1)^n) + 1 - 3^{-n}(1 + (-1)^{n+1}), n \geq 0\}$$

Exercice 7 Soient A et B deux parties non vides et bornées de \mathbb{R} .

(a) Si $A \subset B$, montrer que

$$\sup A \leq \sup B \quad \text{et} \quad \inf A \geq \inf B.$$

Donner des exemples où les inégalités sont strictes. Donner d'autres exemples avec $\sup A = \sup B$ ou $\inf A = \inf B$ et A strictement inclus dans B .

(b) On ne suppose plus $A \subset B$. Montrer que $A \cap B$ est borné, mais pas forcément non vide.

(c) Si $A \cap B \neq \emptyset$, montrer que $\max(\inf A, \inf B) \leq \inf A \cap B \leq \sup A \cap B \leq \min(\sup A, \sup B)$.

Donner un exemple dans lequel les inégalités sont strictes.

Exercice 8 Soient A et B deux parties non vides et bornées de \mathbb{R} .

Montrer que $A \cup B$ est non vide et borné, et que

$$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B) \quad \sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B) \quad \text{et} \quad \sup(-A) = -\inf(A).$$

Exercice 9 Si A et B sont 2 parties de \mathbb{R} , on pose $A + B = \{x + y; x \in A, y \in B\}$.

(a) Donner des exemples tels que

$$A + B \neq A \cup B.$$

(b) Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Limites inférieure et supérieure de suites

Exercice 10 Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$.

1) Montrer que les suites $s_n = \sup\{x_k, k \geq n\}$ et $i_n = \inf\{x_k, k \geq n\}$ sont respectivement décroissante et croissante.

2) En déduire qu'elles convergent.

La limite de la suite s_n est notée $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n$ ou $\limsup x_n$ et est appelée *limite supérieure* de $(x_n)_{n \geq 0}$.

La limite de la suite i_n est notée $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n$ ou $\liminf x_n$ et est appelée *limite inférieure* de $(x_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 11 Calculer les limites supérieures et inférieures des suites définies par:

(a) $a_n = (-1)^n$

(b) $b_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$

(c) $c_{3n} = 1, c_{3n+1} = 0, c_{3n+2} = -1$

(d) $d_n = (1 + \frac{(-1)^n}{n}) \cos(n\pi/3)$

Exercice 12 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E . Montrer que $\liminf_{n \rightarrow \infty} 1_{A_n} = 1_{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n}$, et $\limsup_{n \rightarrow \infty} 1_{A_n} =$

$$1_{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n}.$$

Exercice 13 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de $\overline{\mathbb{R}}$.

(a) Si pour tout $n \geq 0$, $a_n \leq b_n$ alors montrer que $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$ et $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(b) Montrer que $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Montrer par des exemples que ces inégalités peuvent être strictes.

(c) Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$ et $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Exercice 14 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Démontrer les propriétés suivantes

(a) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(b) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-u_n) = -\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

(c) Si $l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$ (resp. $l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$), alors (u_n) admet une sous-suite qui converge vers l .

(d) La suite (u_n) converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = l$.

Exercice 15 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sqrt{n+1} - E(\sqrt{n})$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x . Montrer que $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$ et $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 1$.

Exercice 16 Si (a_n) est une suite périodique, c'est-à-dire, s'il existe un entier k tel que $a_{n+k} = a_n$ pour tout n ; quelles sont les limites inférieure et supérieure de la suite?

Exercice 17 Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombre réels. Soit $A_n =]-\infty, a_n]$ pour tout $n \geq 1$. Que peut-on dire de $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ et $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$.

²Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. Sa *borne supérieure* est le plus petit des majorants de E , i.e. l'unique réel noté $\sup E$ tel que (i) $\forall x \in E, x \leq \sup E$ et (ii) si $M \in \mathbb{R}$ vérifie $\forall x \in E, x \leq M$, alors $M \geq \sup E$. L'existence de $\sup E \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est un *axiome* dans la construction de l'ensemble des nombres réels.