Feuille d'exercices 9

Exercice 1 Déterminer la limite de la suite $J_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{nx+1} dx$.

Exercice 2 Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par:

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} dx$$

et calculer sa dérivée.

Exercice 3 Soit, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$F(x) = \int_0^1 e^{-\frac{x}{t}} dt$$

1) Vérifier que l'on définit ainsi une fonction continue sur $[0, +\infty[$.
2) Montrer que l'on peut dériver l'expression de F sous l'intégrale en tout point $x > 0$.
3) Montrer que la fonction F n'est pas dérivable à droite en 0 (On pourra montrer que $\lim_{x \to 0^+} F'(x) = -\infty$).

Exercice 4 Soient, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$,

$$f(t, x) = e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} \quad \text{et} \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(t, x) dt.$$

1) Montrer que F est une fonction continue vérifiant $F(-x) = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2) Soit $r > 0$. Montrer que l'on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq 2 \frac{e^{-t^2}}{re} \quad \forall (x, t) \in [r, +\infty[\times]0, \infty[$$

En déduire que l'on peut dériver sous le signe intégrale l'expression de $F(x)$ sur $]0, +\infty[$ en tout $x > 0$.
3) Trouver une équation différentielle satisfaite par F sur $]0, +\infty[$ et en déduire l'expression de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Montrer que l'on définit une fonction infiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ par

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx$$

Trouver l'expression explicite de F.

Exercice 6 Soit $f(x) = \int_0^\pi e^{ixe^{i\theta}} d\theta$ pour $x \in [0, +\infty[$.
1) Montrer que f est dérivable et calculer f' explicitement.
2) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
3) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(r)}{r} dr$.

Exercice 7 Soit $f(x)$ la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$. Pour quelles valeurs de x f est-elle définie? À l'aide du théorème de dérivation sous le signe somme, exprimer $f'(x)$ et en déduire l'identité $f(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{dt}{1-e^t}$ pour $x > 0$.

Exercice 8 Soit, pour $t > 0$,

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t + x^2} dx$$

1) Montrer que F est infiniment dérivable sans calculer l'intégrale.
2) Calculer directement F et ses dérivées. En déduire la valeur des intégrales $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.