

Feuille d'exercices 8.

Exercice 1

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est mesurable sur $[1, +\infty[$.
Montrer qu'elle est localement Lebesgue-intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que f_α est Lebesgue-intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$.

2) Montrer que la fonction x^α restreinte à $[0, 1]$ (et prenant une valeur quelconque en 0) est Lebesgue-intégrable si et seulement si $\alpha > -1$.

En résumé: $|x|^\alpha$ est intégrable à l'infini ssi $\alpha < -1$ et est intégrable à l'origine ssi $\alpha > -1$. Pour déterminer si une fonction est intégrable ou pas, on peut essayer de montrer qu'elle croît ou décroît plus vite que les fonctions puissances.

Exercice 2 Dans cet exercice, l'intégrabilité signifie λ -intégrabilité, i.e., l'intégrabilité au sens de Lebesgue.

1) Montrer que $\frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$.

2) Soit $f_n(x) = \frac{\sin(x)}{x^{1+1/n}} 1_{[1, +\infty[}(x)$. Montrer que les fonctions f_n sont intégrables et convergent uniformément, mais que la limite n'est pas intégrable.

3) Soit $g_n(x) = n^{-1} 1_{[0, n]}(x)$. Montrer que les fonctions g_n sont intégrables et convergent uniformément vers une fonction intégrable, mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n d\lambda \neq \int \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n d\lambda.$$

Exercice 3 Etudier la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, de

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) e^{-x^2} d\lambda(x)$$

dans les cas suivants:

- a) $f_n = \frac{1}{n} 1_{[n, +\infty[}$, b) $f_n = n 1_{[1/n, 2/n]}$
c) $f_n = \frac{1}{n} 1_{[0, n]}$, d) $f_n = (-1)^n n 1_{[n, n+1]}$.

Exercice 4 Déterminer les limites des suites :

$$u_n = \sum_{k \geq 1} \frac{n}{nk^2 + k + 1}, \quad v_n = \sum_{1 \leq k \leq 2n} \frac{n^2}{kn^2 + k^2}$$

Exercice 5 Si p et q sont deux réels positifs, montrer que $\int_{[0, 1]} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} d\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$. En déduire une expression de $\ln(2)$.

Exercice 6 Calculer les limites, lorsque $n \rightarrow +\infty$, de l'intégrale suivante (λ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[1, +\infty]} \frac{1}{nx} e^{-\frac{x}{n}} d\lambda(x), \quad (\text{noter que } ue^{-u} \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+)$$