Feuille d'exercices 7.

Exercice 1 Pourquoi l'intégrale de Lebesgue de la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ a-t-elle un sens?

Exercice 2 Soit δ_0 la mesure de Dirac en $0 \in \mathbb{R}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit f une fonction mesurable positive, calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0$.

Exercice 3 Soit μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, i.e. la mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie pour toute partie A de $\mathbb{N}$ par $\mu(A) = \text{Card } A$. Calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu$ quand $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(n) = \frac{1}{3^{n+2}}$.

Exercice 4 Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ et $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Pour $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, on pose $\mu(A) = \int_A f d\lambda$.
Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ et que μ est finie si et seulement si f est λ-intégrable.

Exercice 5 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable et $a \in \mathbb{R}$ tel que $\int_X f^n d\mu = a, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $f = 1_A$ μ-p.p..

Exercice 6 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Supposons $0 \le f \le 1$ et $\int_X f d\mu = 1$. Montrer que $f = 1$ μ-p.p..

Exercice 7 Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) < +\infty$. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et positive. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \mu(\{x; 2^n \le f < 2^{n+1}\}) < +\infty$.

Exercice 8 Soit $(f_n)_{n\ge1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = n^2 x \mathbf{1}_{[0,1/n]} + (2n - n^2 x)\mathbf{1}_{]1/n,2/n]}.$$

Montrer que les f_n sont mesurables et calculer $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\lambda$, $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \int f_n d\lambda$, $\displaystyle\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\lambda$, $\displaystyle\int \limsup_{n\to\infty} f_n d\lambda$.

Exercice 9 Soit f une fonction mesurable positive définie sur un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$. Pour tout nombre entier $n \ge 0$, posons $E_n = \{x \in X : \ f(x) \ge n\}$ et $F_n = E_n \setminus E_{n+1}$. Supposons que f est intégrable.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} f(x) d\mu(x) = 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{F_n} f(x) d\mu(x) < +\infty$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\mu(E_n) = 0$ et $\displaystyle\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \mu(\mathrm{E_n}) < +\infty$.

Exercice 10 1) Montrer qu'une fonction Lebesgue-mesurable $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est Lebesgue-intégrable si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,n]} |f| d\lambda$ existe et est finie.
2) Montrer qu'une fonction Lebesgue-mesurable $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est Lebesgue-intégrable si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} \int_{[0,x]} |f| d\lambda$ existe et est finie.

Exercice 11 Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions mesurables positives sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ telle que f_1 soit μ-intégrable. Montrer que (f_n) converge simplement vers f, que f est intégrable et que $\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Exercice 12 Déterminer

1. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(n+x)^n} d\lambda(x)$ et
2. $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n^2}\right)^n x^p d\lambda(x), \ p \ge 1,$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.