Université de Picardie Jules Verne — 2006-2007
Faculté de Mathématiques et Informatique — Licence S5 Intégration

Feuille d'exercices 6.
Mesure de Lebesgue

Exercice 1 On se place dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu de Lebesgue $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. Si $a \in \mathbb{R}$ alors $\lambda(\{a\}) = 0$. Que peut-on dire de $\lambda(\mathbb{Q})$?
2. Si U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ alors $\lambda(U) > 0$.
3. Si A est une partie mesurable telle que $\lambda(A) > 0$ alors il existe un ouvert non vide contenu dans A.
4. Si K est un compact de $\mathbb{R}$ alors K est mesurable et $\lambda(K) < \infty$.
5. Si A est une partie mesurable telle que $\lambda(A) < \infty$ alors il existe un compact K tel que $A \subset K$.
6. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ telle que $A \subset B$, où $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Exercice 2 Montrer que la mesure $\lambda(I)$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est égale à sa longueur. (*Commencer par les intervalles de longueur entière, puis de longueur inverse d'un entier non nul, puis de longueur rationnelle et enfin quelconque.*)
De la même manière, montrer que la mesure $\lambda(I_1 \times \cdots \times I_n)$ d'un pavé de $\mathbb{R}^n$ (les I_k sont des intervalles de $\mathbb{R}$) est égale à son volume.

Exercice 3 Que vaut la mesure $\lambda([0,1]^k)$ où $[0,1]^k \subset \mathbb{R}^n$ est un pavé de dimension $0 < k < n$? En déduire la mesure $\lambda(\mathbb{R}^k)$, avec $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ un k-plan ($k < n$).

Exercice 4 Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Construire un ouvert non borné de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue au plus ε et qui soit dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Soient $E \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$ et $r \in \mathbb{R}^*$. On note $rE = \{rx, x \in E\}$. On veut montrer que $\lambda(rE) = |r|\lambda(E)$. Montrer cette relation lorsque E est un intervalle, puis un ouvert de $\mathbb{R}$, puis un borélien de $\mathbb{R}$, puis un ensemble quelconque de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Exercice 6 Soit R la relation d'équivalence définie par :

$$xRy \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

1. On admet qu'il existe $A \subset [0,1]$ tel que tout $x \in \mathbb{R}$ soit équivalent à un unique point de A (ceci nécessite d'utiliser l'axiome du choix).
2. Montrer que si $u, v \in \mathbb{Q}$, $u \neq v$, alors $(A + u) \cap (A + v) = \emptyset$.
3. Supposons A mesurable, préciser la mesure de Lebesgue de

   $$B = \cup_{u \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (A + u)$$

   en fonction de la mesure de A.
4. Vérifier que $[0,1] \subset B \subset [-1,2]$ et en déduire que A n'est pas Lebesgue mesurable.