Université de Picardie Jules Verne
Faculté de Mathématiques et Informatique

2006-2007
Licence S5 Intégration

Feuille d'exercices 3.
Mesures

Exercice 1 Soit X un ensemble non vide. Décrire toutes les mesures sur la tribu grossière $\{\emptyset, X\}$?

Exercice 2 Soit X un ensemble muni de la tribu $\mathcal{P}(X)$ (la famille des parties de X). Pour toute partie A de X, posons $\mu(A) = 0$ si A est dénombrable et $\mu(A) = +\infty$ sinon. Montrer que μ définit une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

Exercice 3
a) Soit X un ensemble X muni de la tribu $\mathcal{P}(X)$. Pour toute partie A de X, posons $\mu(A) = \text{Card(A)}$ si A est un ensemble fini et $\mu(A) = +\infty$ sinon. Vérifier que μ définit une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$, c'est la *mesure de décompte sur X*.
b) Soit $m : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$. On pose $\mu(A) = \sum_{x\in A} m(x)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$. Vérifier que c'est une mesure positive et que la mesure de décompte sur X est la mesure discrète associée à la fonction définie par $m(x) = 1$ pour tout $x \in X$.

Exercice 4 Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive telle que $\mu(X) = 1$. On considère

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{T} | \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}.$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une tribu sur X.

Exercice 5 Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to Y$ une application.
a) On pose $\mathcal{B} := f_*\mathcal{A} = \{B \in Y | f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une tribu et montrer que

$$\begin{array}{rccc} \nu : & \mathcal{B} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ & B & \mapsto & \mu(f^{-1}(B)). \end{array}$$

définit une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$, appelée *mesure image de μ par f* et notée $f_*\mu$.
b) Déterminer la mesure image $\nu = f_*\mu$ dans le cas où $\mu = \delta_a$ est la mesure de Dirac au point $a \in X$.
c) Soit $g : Y \to Z$ une application. Montrer que

$$(g \circ f)_*(\mu) = g_*(f_*(\mu)).$$

Exercice 6 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré fini (c'est-à-dire tel que $\mu(X) < \infty$) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = \mu(X)$. Montrer que $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(X)$.

Exercice 7 Soient E un espace métrique et μ une mesure finie définie sur $\mathcal{B}$ (l'ensemble des boréliens de E). On appelle $\mathcal{C}$ la classe des $C \in \mathcal{B}$ tels que : pour $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F tels que

$$F \subset C \subset O, \quad \mu(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire et contient les fermés.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ est stable par les intersections finies.
3. Montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu.
4. En déduire que μ est *régulière*, c'est-à-dire que pour tout $C \in \mathcal{B}$,

$$\mu(C) = \sup\{\mu(F); F \text{ fermé et } F \subset C\} = \inf\{\mu(O); O \text{ ouvert et } C \subset O\}.$$

Exercice 8 Soit X un ensemble, on considère la tribu $\mathcal{P}(X)$ sur X, et la mesure de Dirac δ_a en $a \in X$.
1. Déterminer la classe des parties δ_a-négligeables de X,
2. Expliciter à quelle condition une propriété est vraie δ_a-presque-partout.