

Feuille d'exercices 3.
Fonctions mesurables et boréliennes

Exercice 1 Montrer que l'image d'une partie mesurable par une application mesurable n'est pas toujours mesurable.

Exercice 2 Soit f une fonction de l'espace mesurable (X, \mathcal{T}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, où \mathcal{B} est la tribu des boréliens de \mathbb{R} . Donner une caractérisation de f pour qu'elle soit mesurable lorsque $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ et lorsque $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

Exercice 3 Si A est un ensemble mesurable de \mathcal{T} tel que $B \in \mathcal{T}$ et $B \subset A$ entraîne que $B = \emptyset$ ou $B = A$, montrer que toute fonction \mathcal{T} -mesurable est constante sur A . En particulier, si \mathcal{T} est engendrée par une partition, une fonction mesurable est constante sur chaque ensemble de la partition.

Exercice 4 Les applications suivantes sont-elles boréliennes ?

$$g(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{et} \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Exercice 5 Soient (X, \mathcal{T}) et (X', \mathcal{T}') deux espaces mesurables, f et g deux applications mesurables de X dans X' . Soient $A \in \mathcal{T}$ et h de X dans X' définie par $h(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $h(x) = g(x)$ sinon. Montrer que h est mesurable.

Exercice 6 Montrer que toute fonction croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est borélienne.

Exercice 7 Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que f' est mesurable.

Exercice 8 Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable.

(a) Vérifier que si $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction mesurable alors $|f|$ est mesurable.

(b) Donner un exemple d'une fonction non mesurable dont le module est mesurable.

Exercice 9 Soient (X, \mathcal{T}) un espace mesurable et $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ des applications mesurables. Montrer que les ensembles suivants sont dans \mathcal{T} :

$$A = \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}, \quad B = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}, \quad C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

Exercice 10 Soient (X, \mathcal{T}) et (X', \mathcal{T}') deux espaces mesurables, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : X' \rightarrow X$.

(a) On suppose que pour toute fonction f mesurable, $f \circ g$ est mesurable. Montrer que g est mesurable.

(b) On suppose que pour toute fonction g mesurable, $f \circ g$ est mesurable. Est-ce que f est nécessairement mesurable ?

Exercice 11 Les applications suivantes sont-elles boréliennes ?

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n 1_{[n, n+1[}(x) \quad \text{et} \quad h(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Exercice 12 Soit f une fonction mesurable à valeurs dans \mathbb{R} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la *troncature* f_n de f de niveau n par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } f(x) > n \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq n \\ -n & \text{si } f(x) < -n. \end{cases}$$

Faire un dessin, puis montrer que f_n est mesurable et que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.