

Dénombrabilité

Exercice 1 Soit E un ensemble non-vide. Montrer que le cardinal de E est strictement inférieur à celui de $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E .

Indication: Pour $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$, considérer $\{x \in E \mid x \notin f(x)\} \subset E$.

Exercice 2 Soit A un sous-ensemble infini de \mathbb{N} . Montrer que A est équipotent à \mathbb{N} . Montrer qu'un ensemble X est au plus dénombrable s'il existe une injection de X dans \mathbb{N} .

Exercice 3

(a) Montrer que \mathbb{Z} est dénombrable.

(b) Montrer que \mathbb{Q} est dénombrable.

(c) Dans le cours, vous avez vu que \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Montrer que l'ensemble des irrationnels ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) n'est pas dénombrable).

Exercice 4 Montrer que l'anneau $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable.

Exercice 5 Montrer que tout ensemble infini E contient au moins une partie dénombrable (montrer qu'il existe dans E une suite dont les termes sont tous différents).

Exercice 6 a) Montrer que \mathbb{R} est équipotent à la demi-droite $]0, +\infty[$.

b) Montrer que les demi-droites $]0, +\infty[$ et $]0, +\infty[$ sont équipotentes.

c) Montrer plus généralement l'équipotence de tous les intervalles non triviaux de \mathbb{R} .

Tribus

Exercice 7 Soit $X = \{1, 2, 3\}$. Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(X)$, puis toutes les tribus de X . Trouver une application $f : X \rightarrow X$ telle que pour une certaine tribu \mathcal{B} de X , $f(\mathcal{B})$ ne soit pas une tribu.

Exercice 8 Soient $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E \subset \mathcal{P}(X)$. Déterminer $\mathcal{T}(E)$ la tribu de X engendrée par E .

Exercice 9 Soit E un ensemble. L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu?

Exercice 10 Soit $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_n\}$ une partition finie d'un ensemble X . Décrire la tribu engendrée par \mathcal{P} .

Exercice 11 Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux tribus de \mathbb{R} .

(a) Les familles suivantes sont-elles des tribus de \mathbb{R} ?

$\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \{A : A \in \mathcal{B} \text{ et } A \in \mathcal{B}'\}$, et $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}' = \{A : A \in \mathcal{B} \text{ ou } A \in \mathcal{B}'\}$.

(b) La famille suivante est-elle une tribu de \mathbb{C} ?

$\mathcal{C} = \{A + \mathbb{R}i \in \mathcal{P}(\mathbb{C}) : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$.

(c) Sous quelle condition la famille suivante est-elle une tribu de \mathbb{R}^2 ?

$\mathcal{B} \times \mathcal{B}' = \{A \times A' : A \in \mathcal{B} \text{ et } A' \in \mathcal{B}'\}$.

Exercice 12

1) Soient $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux ensembles et \mathcal{A} une tribu sur X .

Vérifier que $f_*\mathcal{A} = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Y , appelée image directe de \mathcal{A} par f .

2) Soient $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux ensembles et \mathcal{B} une tribu sur Y .

Vérifier que $f^*\mathcal{B} = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur X , appelée image réciproque de \mathcal{B} par f .

Exercice 13 Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{E}_A = \{] - \infty, a]; a \in A\}$.

(a) Décrire la tribu engendrée par \mathcal{E}_A , notée $\sigma(\mathcal{E}_A)$.

(b) Montrer que $\sigma(\mathcal{E}_A) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $A \subset \mathbb{R}$.

(c) Montrer que A est dense dans \mathbb{R} si et seulement si $\sigma(\mathcal{E}_A) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.