

Feuille d'exercices 2. Intégrale de Riemann

Exercice 1 Retrouver la valeur de $\int_0^1 t^2 dt$ à l'aide des sommes de Riemann.

Exercice 2 Dans chacun des cas suivants, montrer que (S_n) converge vers I , puis calculer I .

(a) $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ et $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.

(b) $S_n = \frac{1}{n^2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \dots + n \cos\left(\frac{n\pi}{n}\right) \right)$ et $I = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi x \cos x dx$.

Exercice 3 Si $n \geq 1$, on pose $S_n = \sqrt{1} + \dots + \sqrt{n}$. Montrer que $S_n \sim \frac{2}{3}n\sqrt{n}$.

Exercice 4 Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots 2n}$.

Exercice 5 Soit $I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$,

(a) lorsque f est en escalier.

(b) Lorsque f est continue par morceaux.

Exercice 6 Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $]0, 1]$ par $f_n(x) = n \cdot \mathbf{1}_{]0, \frac{1}{n}[}$.

Comparer $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

Exercice 7 Soit $f_n(x) = x^n$. Calculer $\int_0^1 f_n(x) dx$, puis $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement, mais pas uniformément vers la fonction définie par $f(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}$. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$. Commenter.

Exercice 8 (a) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ converge et que $\left| \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq 2$ (on pourra faire une intégration par parties).

(b) Soit (f_n) la suite de fonctions sur $[1, +\infty[$ définies par $f_n(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \in [1, n]$ et $f_n(x) = \frac{n}{x^2} (10 - \int_1^n \frac{\sin x}{x} dx)$ sinon. Comparer $\int_1^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} f_n(x) dx$.

Exercice 9 Si $A \subset \mathbb{R}$, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction caractéristique de A , i.e. la fonction valant 1 sur A et 0 ailleurs. Si $n \geq 0$, on définit la fonction $f_n = \mathbf{1}_{A_n}$, où $A_n = \{x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, p \leq q, p + q \leq n\}$.

a) Montrer que f_n est Riemann-intégrable, calculer $\int_0^1 f_n(x) dx$ puis $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

b) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Montrer (en utilisant la définition) que cette fonction n'est pas Riemann-intégrable. Commenter.