Feuille d'exercices 1. Opérations ensemblistes, limites inf et sup

Certains exercices sont des exercices d'entrainement à faire chez soi (ceci sera précisé en TD).

Opérations ensemblistes

Exercice 1 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application, $\{A_j\}_{j\in J}$ et $\{B_i\}_{i\in I}$ deux familles de sous-ensembles de respectivement E et F indexées par deux ensembles I et J (éventuellement infinis).
Pour A (resp. B) une partie de E (resp. F), on définit

$$f(A) = \{f(x),\, x \in A\}, \qquad \text{et} \qquad f^{-1}(B) = \{x \in E,\, f(x) \in B\}.$$

1) Montrer que l'on a

$$f(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} f(A_j), \qquad f(\bigcap_{j\in J} A_j) \subset \bigcap_{j\in J} f(A_j).$$

2) Montrer que

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \qquad f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i),$$

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c, \qquad f\big(f^{-1}(B) \bigcap A\big) = B \bigcap f(A).$$

3) Montrer que si f est bijective, alors elle préserve les opérations booléennes $\cap, \cup, \Delta$, et complémentaire.

Exercice 2 Rappelons la définition

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in A^c \end{cases}$$

de la *fonction caractéristique* d'une partie A d'un ensemble X.
(a) Déterminer $\mathbf{1}_\emptyset$ et $\mathbf{1}_X$.
(b) Quelles sont les images réciproques $(\mathbf{1}_A)^{-1}(Y)$ des parties de $\mathbb{R}$?
(c) Soient A et B deux parties de X.
Exprimer les fonctions indicatrices des ensembles $A^c, A \cup B, A \cap B, A\Delta B$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.

Exercice 3 Définitions de limites supérieures et inférieures d'ensembles.
Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille indéxées par $\mathbb{N}^*$ d'ensembles de parties de E, on définit *la limite supérieure* et *la limite inférieure* de cette famille par :

$$\overline{\lim}_n\ A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k, \qquad \text{et} \qquad \underline{\lim}_n\ A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

1) Déterminer $\overline{\lim}_n\ A_n$ et $\underline{\lim}_n\ A_n$ lorsque :
  a) $F, G \subset E$ et $A_{2p} = F$ et $A_{2p+1} = G$, $\qquad \forall\, p \in \mathbb{N}^*$.
  b) $A_k = [-k, 2 + \frac{1}{k}[$, $\qquad \forall\, k \in \mathbb{N}^*$
2) Montrer que

$$\underline{\lim}_n\ A_n \subset \overline{\lim}_n\ A_n,$$

$$\underline{\lim}_n\ A_n^c = \big(\overline{\lim}_n\ A_n\big)^c.$$

3) Montrer que $\underline{\lim}_n\ A_n$ est l'ensemble des points de E qui appartiennent à tous les A_n sauf peut-être pour un nombre fini de n.
Montrer que $\overline{\lim}_n\ A_n$ est l'ensemble des points de E qui appartiennent à une infinité de A_n.

Bornes inférieure et supérieure d'un ensemble

Exercice 4 Trouver les bornes supérieure et inférieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) des parties suivantes:

$$\begin{aligned} A &= \{n^{-1},\ n > 0\} \\ B &= \{2^{-(n+1)}(1+(-1)^n) + 3^n(1+(-1)^{n+1}),\ n \geq 0\} \\ C &= \{2^{-(n+1)}(1+(-1)^n) + 1 - 3^{-n}(1+(-1)^{n+1}),\ n \geq 0\} \end{aligned}$$

Exercice 5 Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
(a) Montrer que $A \cap B$ est borné, mais pas forcément non vide.
(b) Si $A \cap B \neq \emptyset$, montrer que $\max(\inf A, \inf B) \leq \inf A \cap B \leq \sup A \cap B \leq \min(\sup A, \sup B)$.
Donner un exemple dans lequel les inégalités sont strictes.

Exercice 6 Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
Montrer que $A \cup B$ est non vide et borné, et que

$$\inf A \cup B = \min(\inf A, \inf B) \qquad \text{et} \qquad \sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)\,.$$

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

Exercice 7 Si A et B sont 2 parties de $\mathbb{R}$, on pose $A + B = \{x + y\ ;\ x \in A,\ y \in B\}$.
Donner un exemple tel que

$$A + B \neq A \cup B.$$

Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Limites inférieure et supérieure

Exercice 8 Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$.
1) Montrer que les suites $s_n = \sup\{x_k,\ k \geq n\}$ et $i_n = \inf\{x_k,\ k \geq n\}$ sont respectivement décroissante et croissante.
2) En déduire qu'elles convergent.
La limite de la suite s_n est notée $\overline{\lim}_n\ x_n$ ou $\lim_n \sup x_n$ et est appelée *limite supérieure* de $(x_n)_{n\geq 0}$.
La limite de la suite i_n est notée $\underline{\lim}_n\ x_n$ ou $\lim_n \inf x_n$ et est appelée *limite inférieure* de $(x_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 9 Calculer les limites supérieures et inférieures des suites définies par:
(a) $a_n = (-1)^n$
(b) $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$
(c) $a_{3n} = 1, a_{3n+1} = 0, a_{3n+2} = -1$
(d) $a_n = (1 + \frac{(-1)^n}{n})\cos(n\pi/3)$

Exercice 10 Si (a_n) est une suite périodique, c'est-à-dire, s'il existe un entier k tel que $a_{n+k} = a_n$ pour tout n; quelles sont les limites inférieure et supérieure de la suite?

Exercice 11 Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombre réels. Soit $A_n =]-\infty, a_n]$ pour tout $n \geq 1$. Déterminer $\overline{\lim}\ A_n$ et $\underline{\lim}\ A_n$.

Exercice 12 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer la proposition suivante: si pour tout $n \geq 0$, on a $a_n \leq b_n$ alors $\underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n$ et $\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, b_n$.

Exercice 13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Démontrer les propriétés suivantes
(a) $\underline{\lim}\ u_n \leq \overline{\lim}\ u_n$.
(b) $\overline{\lim}(-u_n) = -\underline{\lim}(u_n)$
(c) Si $l = \overline{\lim}\ u_n$ (resp. $l = \underline{\lim}\ u_n$), alors (u_n) admet une sous-suite qui converge vers l.
(d) La suite (u_n) converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ ssi $\underline{\lim}\ u_n = \overline{\lim}\ u_n = l$.

Exercice 14 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sqrt{n+1} - E(\sqrt{n})$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Montrer que $\underline{\lim}(u_n) = 0$ et $\overline{\lim}(u_n) = 1$.