

Devoir 3. A rendre la semaine du 20 au 24 novembre 2006.

Exercice 1 Soit \mathcal{A} la classe des sous-ensembles A de \mathbb{Z} tels que, pour $n > 0$, $2n \in A$ si et seulement si $2n + 1 \in A$.

- a) Montrer que \mathcal{A} est une tribu sur \mathbb{Z} .
- b) Montrer que l'application $n \mapsto n + 2$ est une bijection mesurable de $(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ vers $(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ mais que son inverse n'est pas mesurable.

Exercice 2 Soient (X, \mathcal{T}) un espace mesurable et $(f_n : X \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble des $x \in X$ où $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente est mesurable.

Exercice 3 Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{E}_A = \{] - \infty, a]; a \in A \}$.

1. Décrire $\sigma(\mathcal{E}_{\mathbb{Z}})$ (la tribu engendrée par $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$).
2. Montrer que $\sigma(\mathcal{E}_A) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $A \subset \mathbb{R}$.
3. Montrer que A est dense dans \mathbb{R} si et seulement si $\sigma(\mathcal{E}_A) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.