

Devoir 3. A rendre la semaine du 10 au 15 décembre 2007.

Exercice 1 Soit μ une mesure positive sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ telle que $\mu(A) \in \{0, 1\}$ pour toute partie A de \mathbb{R} . On désigne par (H) la propriété: *La mesure de tout singleton $\{x\}$ est nulle.*

1) On suppose (H) est vraie et que μ n'est pas identiquement nulle.

a) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a $\mu(]a, b]) = \mu([a, b]) = \mu([a, b[)$.

b) Si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a < b$ et $\mu([a, b]) = 1$, montrer que pour $c = \frac{a+b}{2}$ on a soit $\mu([a, c]) = 1$, soit $\mu([c, b]) = 1$.

c) Montrer qu'il existe un intervalle compact I de \mathbb{R} tel que $\mu(I) = 1$.

d) Construire par récurrence une suite décroissante d'intervalles compacts $I_k, k \geq 0$, dont les longueurs tendent vers 0 et tels que $\mu(I_k) = 1$ pour tout $k \geq 0$.

e) En déduire une contradiction.

2) Montrer que si μ n'est pas identiquement nulle, alors c'est une mesure de Dirac.

3) Enoncer le théorème démontré dans cet exercice.

Exercice 2 Soient (X, \mathcal{T}) un espace mesurable et (X', d) un espace métrique munit de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X')$ (engendrée par les ouverts définis par d).

1) Soient $f, g : X \rightarrow X'$ deux applications mesurables.

a) Montrer que

$$\{x \in X, f(x) = g(x)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{x \in X, d(f(x), g(x)) \leq \frac{1}{n}\}.$$

b) En déduire que les ensembles $\{x \in X, f(x) = g(x)\}$ et $\{x \in X, f(x) \neq g(x)\}$ sont des ensembles mesurables.

2) On suppose de plus que l'espace métrique (X', d) est complet. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $f_n : X \rightarrow X'$, $n \in \mathbb{N}$ une suite d'applications mesurables.

a) Montrer que

$$\{x \in X, (f_n(x))_n \text{ converge}\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p, q \geq n} \{x \in X, d(f_p(x), f_q(x)) \leq \frac{1}{N}\}.$$

b) En déduire que l'ensemble $\{x \in X, (f_n(x))_n \text{ converge}\}$ appartient à \mathcal{T} .

Exercice 3

1) Soit (X, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions de X dans \mathbb{R}^+ qui sont μ -intégrables et qui convergent simplement vers 0 sur X . Montrer que:

a) La série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n$ converge simplement sur X . On note g la somme de cette série.

b) g est μ -intégrable sur X .

c) $\int g d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int f_n d\mu$.

2) En appliquant la question 1), de la façon appropriée que l'on expliquera, montrer que pour $0 \leq a < 1$,

$$\int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-a}.$$