Université de Picardie Jules Verne — 2007-2008

Faculté de Mathématiques et Informatique — Licence S5 Intégration

Devoir 1. À rendre la semaine du 15 au 20 octobre 2007.

Exercice 1 Soient E et F deux ensembles, et f une application $E \to F$.
(a) Montrer que $f^{-1}(f(A)) \supset A$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$ pour tout $A \subset E$ et $B \subset F$.
(b) Montrer que $f^{-1}(f(A)) = A$ pour toute partie A de E si et seulement si f est injective.
(c) Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B$ pour toute partie B de F si et seulement si f est surjective.
(d) Soit f une application $f : E \to \{0,1\}$. Montrer que f est la fonction indicatrice d'un sous-ensemble de E.

Exercice 2 1) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels. Soit $A_n =]-\infty, a_n]$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que

$$]-\infty, \overline{\lim}\ a_n[\ \subset \ \overline{\lim}\ A_n \subset \ ]-\infty, \overline{\lim}\ a_n] \qquad \text{et}$$

$$]-\infty, \underline{\lim}\ a_n[\ \subset \ \underline{\lim}\ A_n \ \subset \ ]-\infty, \underline{\lim}\ a_n].$$

2) Pour chaque inclusion, donner une suite (a_n) où cette inclusion est une égalité.

Exercice 3 Soit (u_n) une suite bornée de $\mathbb{R}$, et (v_n) la suite définie pour tout $n \geq 0$ par $v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.
1) Montrer que pour $n, k \in \mathbb{N}$, avec $n > k$, on a

$$\frac{n-k}{n} \inf_{i\geq k+1} u_i \leq \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} u_i \leq \frac{n-k}{n} \sup_{i\geq k+1} u_i.$$

2) En déduire que

$$\underline{\lim}\,(u_n) \leq \underline{\lim}\,(v_n) \leq \overline{\lim}\, v_n \leq \overline{\lim}\, u_n.$$

3) En déduire que si (u_n) converge vers l, alors (v_n) aussi. Inversement donner l'exemple d'une suite non convergeante telle que la suite (v_n) converge (*pensez à une suite périodique*).