Exercice 1

On suppose que $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{Z}, x \geq -1\}$, $\Theta =]0, 1[$ et que pour tout $\theta \in \Theta$, la loi $\mathbb{P}_\theta$ est définie par $\mathbb{P}_\theta(\{-1\}) = \theta$ et $\mathbb{P}_\theta(\{x\}) = (1 - \theta)^2 \theta^x$ si $x \geq 0$.

1) Montrer que la statistique définie pour tout $x \in \mathcal{H}$ par :

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est un estimateur sans biais $(1 - \theta)^2$.

2) Montrer que toute statistique centrée ψ de ce modèle est de la forme $\psi(x) = ax$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.

3) Montrer que pour toute statistique centrée ψ , on a

$$\text{Cov}_\theta(\psi, \varphi_0) = 0.$$

En déduire que l'estimateur φ_0 est VUMSB.

Exercice 2

On considère $\mathcal{H} = \mathbb{Z}$, $\Theta = \mathbb{Z}$ et pour tout $\theta \in \Theta$, $\mathbb{P}_\theta$ désigne la loi uniforme sur $\{\theta - 1, \theta, \theta + 1\}$.

1) Montrer que l'estimateur $\varphi_0 = Id$ est un estimateur sans biais de θ .

2) Montrer qu'une statistique $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ est centrée implique qu'elle est 3-périodique.

3) Montrer que φ_0 n'est pas un estimateur VUMSB de θ .

Exercice 3

Soit $(\mathbb{N}^n, (\mathbb{P}_\theta^{\otimes n})_{\theta \in \mathbb{R}_+^*})$ le modèle d'échantillonnage i.i.d. où pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, la loi $\mathbb{P}_\theta$ est la loi de Poisson de paramètre θ

1) Montrer que la statistique

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

est exhaustive, complète et est l'unique estimateur VUMSB de θ .

2) On souhaite estimer $g(\theta) = e^{-\theta}$.

a) Montrer que la statistique

$$\psi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \mathbf{1}_{\{0\}}(x_1)$$

est un estimateur sans biais de $g(\theta)$.

b) En déduire l'unique estimateur VUMSB de $g(\theta)$.

Utiliser le théorème de Lehmann-Scheffé

Exercice 4

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon i.i.d. de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre $\theta \in]0, 1[$.

1) Montrer que la moyenne empirique $\overline{X}_n$ est un estimateur VUMSB de θ .

2) Pour un nombre entier k tel que $k \leq n$, on souhaite estimer θ^k .

Montrer que $\prod_{i=1}^k X_i$ est un estimateur sans biais de θ^k .

Déterminer l'estimateur VUMSB de θ^k . Que se passe-t-il pour $k = 1$?

Exercice 5

On considère un échantillon i.i.d. de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre $\theta \in]0, 1[$ inconnu.

- 1) a) Calculer le score et l'information de Fisher de ce modèle.
 - b) Montrer que pour tout $x \in \{0, 1\}^n$, $\mathbb{P}_\theta(\{x\})$ varie peu pour θ proche de $1/2$ et varie beaucoup pour θ proche de 0 ou 1.
- 2) Montrez de 2 manières que la moyenne empirique est un estimateur uniformément efficace de θ .

Exercice 6 On reprend les notations de l'exercice 3.

- 1) Montrer que la statistique φ est un estimateur uniformément efficace de θ .
- 2) Montrer que l'unique estimateur VUMSB de $e^{-\theta}$ n'atteint pas la borne de Cramer- Rao, et donc n'est pas uniformément efficace.

Exercice 7

On considère un échantillon i.i.d. de taille n de la loi normale $\mathcal{N}(m, \theta)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ est inconnu.

- 1) Déterminez le score et l'information de Fisher de ce modèle.
 - 2) On suppose que $m = 0$
- a) Montrer que la variance empirique S_n est un estimateur sans biais de θ , mais qui n'atteint pas la borne de Cramer-Rao.
- Montrez que l'estimateur :

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

est un estimateur uniformément efficace de θ .

- 3) On suppose m inconnu.
- Montrer que la borne de Cramer Rao ne peut être atteinte et qu'il n'existe pas d'estimateur uniformément efficace de θ .