

Exercice 1

On considère le modèle statistique construit sur un échantillon $X = (X_1, \dots, X_n)$ de taille n où les v.a.r. X_i sont i.i.d. de loi la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de moyenne $m \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 \in \mathbb{R}_*^+$.

- 1) Mettre ce modèle sous forme exponentiel.
 - 2) A l'aide d'une reparamétrisation, écrire ce modèle sous forme canonique.
- Préciser son espace naturel des paramètres et sa statistique naturelle.
- 3) En déduire

$$E_\theta\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right), \quad E_\theta\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right), \quad E_\theta\left(\left(\sum_{j=1}^n X_j\right)\sum_{i=1}^n X_i^2\right), \quad Var_\theta\left(\sum_{i=1}^n X_i\right).$$

Exercice 2

- 1) Soit μ une mesure de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que si g est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\int_{[\theta, \theta']} g(x) d\mu(x) = 0, \quad \text{pour tout intervalle } [\theta, \theta'],$$

alors g est nulle.

- 2) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, considérons un échantillon i.i.d. $(X_1, \dots, X_n)$ de taille n et de loi $\mathbb{P}_\theta$ de densité $x \mapsto e^{x-\theta} \mathbf{1}_{]-\infty, \theta]}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$.

On considère la statistique $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$

- a) Montrer que $X_{(n)}$ admet pour densité

$$y \mapsto n e^{n(y-\theta)} \mathbf{1}_{]-\infty, \theta]}(y).$$

- b) Montrer que la statistique $X_{(n)}$ est complète pour θ

De même, montrer que $X_{(n)}$ est complète lorsque $\mathbb{P}_\theta$ est la loi uniforme sur $]0, \theta[$ avec $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3

- 1) Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. i.i.d. de loi gamma de paramètre $a > 0$. Déterminez une statistique exhaustive pour le paramètre a .

2) On suppose que les variables réelles $X_1, \dots, X_n$ sont indépendentes. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, la loi de X_i est donnée par la densité $f_{X_i}(\cdot, \theta)$.

- a) Dans le cas où :

$$f_{X_i}(x, \theta) = e^{i\theta - x} \mathbf{1}_{[i\theta, +\infty[}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Déterminez une statistique exhaustive pour θ

- b) Faire de même dans le cas où $\theta \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_{X_i}(x, \theta) = \frac{1}{2i\theta} \mathbf{1}_{[-i(\theta-1), i(\theta+1)]}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

On suppose que l'on dispose d'un échantillon i.i.d. de taille n de la loi gaussienne $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ où seule la moyenne $\theta \in \mathbb{R}$ est inconnue.

Montrer que la statistique moyenne empirique $\bar{X} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$ est exhaustive. Est elle complète ?

Exercice 5

On considère le modèle statistique construit sur un échantillon $X = (X_1, \dots, X_n)$ de taille n où les v.a.r. X_i sont i.i.d. de loi la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de moyenne $m \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 \in \mathbb{R}_*^+$. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

1) Montrer que la vraisemblance du modèle, par rapport à la mesure de Lebesgue, s'écrit

$$f(x, m, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - m)^2\right)\right).$$

2) En déduire que la statistique $\varphi(x) = (\bar{x}, s^2)$ est exhaustive minimale pour le paramètre (m, σ^2) dans le modèle gaussien.

Exercice 6

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, considérons un échantillon de taille n de la loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^+$:

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\theta}{e^{\theta^2}-1} e^{\theta x} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Calculer la vraisemblance de ce modèle sur $\mathbb{R}_+^n$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^n$.

2) Montrer que la statistique $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sup_{i=1, \dots, n} x_i, \sum_{i=1}^n x_i \right)$ est exhaustive pour le paramètre unidimensionnel θ .

Exercice 7

Pour un paramètre $\lambda > 0$, et un réel $k > 0$, on considère la loi de Weibull $\mathbb{P}_\lambda$ admettant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue la fonction

$$x \mapsto \frac{kx^{k-1}}{\lambda^k} \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right) \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x).$$

On suppose le paramètre k connu.

1) Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon indépendant de loi $\mathbb{P}_\lambda$. Montrer que le modèle associé est un modèle exponentiel.

3) Donner une statistique exhaustive minimale de ce modèle.

4) Calculer $E_\lambda(\sum_{i=1}^n X_i^k)$ et $Var_\lambda(\sum_{i=1}^n X_i^k)$