Exercice 1

1) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d. de loi $\mathbb{P}_\theta$ paramétrée par $\theta \in \Theta$. Notons $X_{(1)} = \min\limits_{1 \le i \le n} X_i$ et $X_{(n)} = \max\limits_{1 \le i \le n} X_i$.
Déterminer la fonction de répartition $X_{(n)}$, puis celle de $X_{(1)}$.
Lorsque $\mathbb{P}_\theta$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, déterminer leurs fonctions de densité.
Déterminer dans ce cas la fonction de densité du couple $(X_{(1)}, X_{(n)})$.
Déterminer la fonction de densité de la variable $\frac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}$.

Exercice 2 *CNS d'indépendance de* $\overline{X}$ *et* S^2.
Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. i.i.d. d'espérance m et de variance σ^2 finie. On pose :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \Sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2, \qquad \text{et} \qquad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

1) Montrer que Σ^2 converge presque sûrement vers σ^2 et que $E(\Sigma^2) = \sigma^2$ (on dit que l'estimateur est *sans biais*).
Qu'en est il de S^2 ?

2) On suppose que les (X_i) suivent la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

a) Quelles sont les lois de $\overline{X}$ et $\dfrac{n\Sigma^2}{\sigma^2}$?

b) Montrer que $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes.

3) On suppose à présent que les X_i sont indépendants de même loi inconnue et que les variables $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes.
Soit ϕ la fonction caractéristique de X_1.

a) Montrer que $nS^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2$.

b) Soit $m = 0$. Calculez $E(nS^2)$ en fonction de σ^2 et montrez que $E(nS^2 e^{itn\overline{X}}) = (n-1)\sigma^2(\phi(t))^n$ pour tout réel t.

En déduire que ϕ est solution de

$$\frac{\phi''}{\phi} - (\frac{\phi'}{\phi})^2 = -\sigma^2$$

$$\text{avec } \phi(0) = 1, \qquad \phi'(0) = 0.$$

En déduire que X_i est de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. *On pourra poser pour cela* $\psi(t) = \log(\phi(t))$

c) Montrer que l'on peut se passer de l'hypothèse $m = 0$.

Exercice 3

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Considérons les variables aléatoires

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n} X_i^2, \qquad T'n = \frac{X_{n+1}}{\sqrt{Y_n}} \qquad T_n = \sqrt{n} T'_n.$$

1) Démontrer que la densité de Y_n est :

$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{y}{2}) \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(y).$$

2) Calculer la densité de T'_n.

3) Montrer que la densité de T_n est :

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}$$

.

4) Calculer l'espérance et la variance de T_n

5) En déduire que lorsque n tend vers $+\infty$, T_n converge en loi vers une loi normale centrée réduite.