EXERCICES DE THÉORIE ERGODIQUE

1. DYNAMIQUES TOPOLOGIQUES

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Prenons $X = \{e^{it}; t \in \mathbb{R}\}$ et T définie par $T(e^{it2\pi}) = e^{i(t+\alpha)2\pi}$.

Montrer que le couple (X, T) est un s.d.t. isomorphe à $(\mathbb{T}, R_\alpha)$.

Montrer que $(\mathbb{T}, R_\alpha)$ est un facteur du système défini sur $\mathbb{T}^2$ par l'application

$$(x, y) \mapsto (x + \alpha, \cos(2\pi y) + 2x).$$

Exercice 2 (point fixe). Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 3 (Théorème de Sharkovskii). Soient I un intervalle et $f: I \rightarrow f(I)$ une fonction continue telle que $I \subset f(I) \subset \mathbb{R}$.

1) Montrer que f admet un point fixe.

2) Montrer que si J et K sont deux intervalles, K est fermé tels que $K \subset f(J)$, alors il existe un intervalle $L \subset J$ tel que $f(L) = K$.

3) En déduire que si f admet un point de période 3, alors il admet pour tout $n \in \mathbb{N}$, un point n -periodique.

Exercice 4 (Translation). Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Montrer que $\{n\alpha \bmod 1; n \in \mathbb{Z}\} = [0, 1]$.

En déduire que $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, R_\alpha)$ est minimal.

Exercice 5 (Décalage complet). Considérons le système dynamique $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ où

$$\begin{aligned} \sigma: \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} &\rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \\ (x_n)_n &\mapsto (x_{n+1})_n \end{aligned}$$

Montrer que pour tout entier n , il existe une orbite de période n .

Montrer que l'ensemble des points périodiques est dense dans $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

Montrer qu'il existe une orbite dense dans $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

Exercice 6 (L'application logistique). On considère l'application $f: x \mapsto \lambda x(1-x)$ définie sur $\mathbb{R}$ où $\lambda > 0$ est une constante. On note I l'intervalle $[0; 1]$. Le but de l'exercice est d'étudier la dynamique de f en fonction de différentes valeurs du paramètre λ .

Cas : $0 < \lambda \leq 2$.

1) Montrer que $f(I) \subset I$.

2) Pour $0 < \lambda \leq 1$, déterminer les ensembles omega limite $\omega(x)$ pour tout $x \in I$.

3) Pour $1 < \lambda \leq 2$, montrer que tous les points de $]0; 1[$ convergent vers un point fixe de f .

Cas : $\lambda = 4$.

1) Montrer que $f(I) \subset I$ et qu'il existe $y_0 \in [0; 1/2]$ et $y_1 \in [1/2; 1]$ tels que $f(y_0) = f(y_1) = 1/2$. En déduire que

$$f^2([0; y_0]) = f^2([y_0; 1/2]) = I,$$

$$f^2([1/2; y_1]) = f^2([y_1; 1]) = I.$$

Montrer que f a 4 points fixes.

2) Montrer que pour tout entier n , f^n a 2^n points fixes.

3) Montrer que f est un facteur de l'application tente T sur I donnée par

$$\begin{aligned} T(x) &= 2x & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ &= -2x + 2 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

par l'application

$$h(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi x)).$$

Cas : $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ (> 4).

1) Déterminer l'ensemble omega-limite $\omega(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus I$.

2) On s'intéresse aux points dont l'orbite par f reste dans un domaine compact. On note Λ l'ensemble de ces points. Montrer que

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(I).$$

3) On notera I_0 (resp. I_1) la composante connexe située à gauche (resp. à droite) de l'ensemble $f^{-1}(I)$. Ainsi $f^{-1}(I) = I_0 \cup I_1$. Soit S l'application

$$\begin{aligned} S : \Lambda &\rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \\ x &\mapsto (s_i)_i \end{aligned}$$

où $s_i = k \in \{0, 1\}$ si et seulement si $f^i(x) \in I_k$.

a) Montrer qu'il existe une constante $K > 1$ telle que pour tout x de Λ , on a $|f'(x)| > K$.

b) En déduire que l'application S est injective.

c) Montrer que l'application S est surjective.

(Aide : pour $(s_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ on pourra montrer que la suite d'intervalles $(I_{s_0} \cap f^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap f^{-n}(I_{s_n}))_n$ est décroissante pour l'inclusion).

d) Montrer que S est un homéomorphisme, et réalise une conjugaison avec l'action du décalage sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

e) Montrer que pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$, f admet un point de période n . Montrer que f admet une orbite dense dans Λ .

Exercice 7. On suppose que $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ est un homéomorphisme conjugué à une rotation R_α , avec α irrationnel. Montrer que l'application qui réalise la conjugaison est unique à une rotation près. (i.e. si $h_i \circ f = R_\alpha \circ h_i$, $i = 1, 2$ alors $h_1 \circ h_2^{-1}$ est une rotation).

Exercice 8 (Rotation sur le tore.). Soit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. Notons T_γ la rotation sur $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ définie par

$$T_\gamma(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \gamma_1, \dots, x_n + \gamma_n) \pmod{1}.$$

1) On suppose que les nombres $\gamma_1, \dots, \gamma_n, 1$ sont rationnellement indépendants, i.e.

$$\sum_{i=1}^n k_i \gamma_i = k, \quad \text{avec } k, k_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = k_1 = \dots = k_n = 0.$$

a) Montrer qu'il existe une orbite dense.

b) En déduire que toutes les orbites sont denses.

2) On suppose, à présent le contraire. Les nombres $\gamma_1, \dots, \gamma_n, 1$ sont rationnellement dépendants, i.e. ils ne sont pas rationnellement indépendants.

a) Cas particulier. Que peut-on dire sur la dynamique de $T_{(\alpha, 0)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

b) Montrer dans le cas général qu'il existe des sous-tores invariants et que la dynamique sur ces sous tores sont des rotations.

3) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} A_\alpha: \mathbb{T}^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + \alpha, y + x) \pmod{1} \end{aligned}$$

est topologiquement transitive si et seulement si α est irrationnel.

Exercice 9 (Automorphismes du tore). 1) Soit $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire à coefficients entiers. Montrer que

$$\text{card}(\mathbb{Z}^n \cap L([0, 1]^n)) = |\det L|.$$

2) Soit L l'application linéaire de matrice

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et notons son application induite sur le tore $F_L: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$.

Montrer que le nombre de point fixe de l'application F_L^n est

$$\lambda_1^n + \lambda_1^{-n} - 2,$$

où λ_1 est la valeur propre de L module maximal.

2. MESURES ET THÉORÈMES ERGODIQUES

Exercice 10. Donner un exemple de transformation de l'intervalle qui n'admet pas de mesure invariante.

Exercice 11. Soit $S : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ définie par $S(x) = 2x \bmod 1$.
Considérons $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ le s.d.m. défini dans la Section 3 du cours avec $a = 1/2$.

Montrer que les s.d.m. $([0, 1[, \mathcal{A}, \lambda, S)$ et $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ sont conjugués en mesure.

Exercice 12. Soient $\alpha \in [0, 1[\setminus \mathbb{Q}$ et B un Borélien de $[0, 1[$. Que vaut

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_B(x + k\alpha) ?$$

Exercice 13. Pensez-vous que pour presque tout $x \in [0, 1[$ la fréquence de 1 dans l'écriture de x en base 2 est $1/2$?

Exercice 14. Quelle est la fréquence du chiffre 7 dans la suite des premiers chiffres de 2^n , $n \geq 0$, en base 10 ?

Exercice 15 (Théorème de Borel pour les nombres normaux). Montrer que presque tout nombre de $[0, 1]$ est normal en base 2 : Pour presque tout $x \in [0, 1]$ la fréquence de 1 dans l'écriture en base 2 de x est $1/2$.

Exercice 16. Montrer que la mesure de Haar sur le tore $\mathbb{T}^n$ est l'unique mesure invariante par la rotation définie dans l'exercice 8 dans le cas 1. Que se passe-t-il dans le cas général ?

Est ce la même chose pour l'application F_L sur $\mathbb{T}^2$ de l'exercice 9 ?

Exercice 17. Soit (X, T, μ) un système dynamique transitif.

Soit $U : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$ l'opérateur défini par $U(f) = f \circ T$. Montrer que les fonctions propres de U associées à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendantes.

Exercice 18. Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un s.d.m. où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne associée à l'espace métrique compact X .

Soit Ω un ensemble de fonctions continues dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Montrer que si pour tout f dans Ω la suite $(1/n) \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$ converge uniformément vers une constante, alors μ est la seule mesure invariante de $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$.

Exercice 19. Soient $T(z) = az$ une rotation du cercle unité $X = \{e^{it}; t \in [0, 1[\}$ et λ la mesure de Lebesgue sur X .

1) $(X, \mathcal{B}, \lambda, T)$ est-il (fortement, faiblement) mélangeant ?

2) Montrer que $(X, \mathcal{B}, \lambda, T)$ est ergodique si et seulement si a n'est pas une racine de l'unité.

3) Lorsque a n'est pas une racine de l'unité, montrer que T est uniquement ergodique.

Exercice 20. Montrer que pour $\tau \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, les applications $x \mapsto x + \tau$ et $x \mapsto ax$ définissent des opérateurs unitaires et mélangeant sur respectivement $L^2(\mathbb{R}, dx)$ et $L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dx}{x})$.

3. ENTROPIE

Exercice 21. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un s.d.m. tel qu'il existe p vérifiant $T^p x = x$ pour tout $x \in X$. Montrer que $h(T) = 0$.

Exercice 22. Soit $X = [0, 1[$ et R_α la rotation d'angle α (modulo 1).

1) Montrer que si α est rationnel alors $h(T) = 0$.

Supposons α irrationnel.

2) Montrer que $\{R_\alpha^{-n}(x); n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1[$ pour tout $x \in [0, 1[$.

3) En déduire que $\bigvee_{n=0}^{+\infty} R_\alpha^{-n} \zeta$ engendre la tribu de Lebesgue, où ζ est la partition $\{[0, 1 - \alpha[, [1 - \alpha, 1[\}$.

4) Montrer que le nombre d'atomes dans $\bigvee_{n=0}^{n-1} R_\alpha^{-n} \zeta$ est inférieur ou égale à $2n$. En déduire que $h(R_\alpha) = 0$.

Exercice 23. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ le full shift sur 2 lettres (i.e. $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$). Déterminer $h(T)$ pour vos 2 mesures ergodiques μ préférées

Exercice 24. Soit (X, T) un sous-shift sur l'alphabet fini A .

Montrer que s'il existe n tel que $p_X(n) \leq n$ alors $h_{\text{top}}(X, T) = 0$.

Soit $x \in A^{\mathbb{N}}$.

Montrer que si $p_x(n) \leq n$ pour un certain n , alors x est ultimement périodique.

Exercice 25. Trouver $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ telles que $p_x(n) = 2^n$ et $p_y(n) = n + 1$.

Exercice 26. Soit (X, T) un sous-shift minimal sur un alphabet fini avec X non fini.

Pour tout $u \in L(X)$ on définit la fonction r_u par

$$r_u(x) = \min\{n; T^n x \in [u]\}.$$

Nous supposons qu'il existe K tel que pour tout $u \in L(X)$,

$r_u(x) \leq K|u|$ pour tout $x \in X$.

Montrer les assertions suivantes.

1) Pour tout n chaque mot de longueur n apparaît au moins une fois dans tout mot de longueur $K(n + 1)$.

2) $p_X(n) \leq Kn$ pour tout n . En déduire l'entropie de (X, T) .

3) Si $u^{K+1} \in L(X)$ alors u est le mot vide.

4) Pour tout $u \in L(X)$, et $x \in [u]$, $r_u(x) \geq (1/K)|u|$.

5) Pour tout $u \in L(X)$, $\#\{r_u(x); x \in [u]\} \leq K(K + 1)^2$.

Exercice 27. Calculer l'entropie de la transformation $x \mapsto 3x \pmod{1}$ définie sur $[0, 1]$...

Exercice 28. Calculer l'entropie topologique de la transformation S définie sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

pour tout $x = (x_n)$ par

$$S(x) = (1, x_1, x_2, \dots) \text{ si } x_0 = 0,$$

$$S(1, 1, \dots) = (0, 0, \dots), \text{ et}$$

$$S(x) = (0, 0, \dots, 0, 1, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) \text{ sinon, où } n = \min\{i; x_i = 0\}.$$

Exercice 29. Soit (X, T) le fullshift sur $\{0, 1\}$.

Calculer son entropie topologique.

Trouver une mesure μ dont l'entropie métrique est maximale.

En trouver une autre d'entropie nulle et non maximale.

Exercice 30. Soient $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une transformation continue monotone et μ une mesure T -invariante..

On supposera que T a un générateur fort $\alpha = \{I_1, \dots, I_a\}$ constitué d'intervalles.

La partition $\alpha_n = \bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\alpha$ est constitué des ensembles

$$[i_0, \dots, i_{n-1}] = I_{i_0} \cap T^{-1}I_{i_1} \cap \dots \cap T^{-(n-1)}I_{i_{n-1}}.$$

La mesure de Lebesgue sera noté λ .

1)

Montrer que

$$\lambda([i_1, \dots, i_{n-1}]) = |T'(z_{i_0, \dots, i_{n-1}})| \lambda([i_0, \dots, i_{n-1}])$$

pour un $z_{i_0, \dots, i_{n-1}} \in [i_0, \dots, i_{n-1}]$.

2)

Montrer que si $(b_{n+1} - b_n)$ tend vers $C \in \mathbb{R}$ alors b_n/n converge vers C .

3) Montrer que l'entropie vaut

$$h_\mu(T) = \int_{[0,1]} \log |T'(x)| d\mu.$$

On considérera

$$b_n = \sum_{i_0, \dots, i_{n-1}} \mu([i_0, \dots, i_{n-1}]) \log \lambda([i_0, \dots, i_{n-1}]) \text{ et}$$

$$L_n = \sum_{i_0, \dots, i_{n-1}} \mu([i_0, \dots, i_{n-1}]) \log (|T'(z_{i_0, \dots, i_{n-1}})|)$$

4. SOUS-SHIFTS DE TYPE FINI

Soient A un alphabet fini et $(A^{\mathbb{Z}}, T)$ le full-shift.

Exercice 31. Trouver une mesure ergodique pour le full-shift.

Définition 1. Soit (X, T) , $X \subset A^{\mathbb{Z}}$, un sous-shift.

On note $L(X)$ l'ensemble des mots apparaissant dans l'un des éléments de X .

Le sous-shift (X, T) est de type (N) -fini s'il existe un ensemble I fini de mot de longueur au plus N tel que

$L(X)$ est l'ensemble des éléments de $A^{\mathbb{Z}}$ n'ayant pas d'occurrence de mots appartenant à I .

C'est-à-dire

$$L(X) = \{x \in A^{\mathbb{Z}}; \forall (n, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, x_n x_{n+1} \dots x_{n+l} \notin I\}.$$

Exercice 32. Montrer que l'on peut supposer que tous les mots de I sont de longueur N .

Dans ce qui suit nous supposons toujours que les mots de I ont la même longueur.

Exercice 33. Soit (X, T) un sous-shift de type 2-finis et I son ensemble de mots interdits.

Considérons la matrice M de dimension $|A| \times |A|$ définie par :

$$M_{a,b} = 1 \text{ si } ab \notin I \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que $X = \{x \in A^{\mathbb{Z}}; M_{x_k x_{k+1}} = 1, k \in \mathbb{Z}\}$.

Montrer que le nombre de point n -périodique est $\text{tr}(M^n)$.

Exercice 34. Montrer que tout sous-shift de type fini est topologiquement isomorphe à un sous-shift de type 2-finis.

Soient $p = (p_1, \dots, p_{|A|})$ un vecteur de probabilité et $P = (p_{i,j})_{i,j \in A}$ tel que $p_{i,j} \geq 0$, $\sum_{j=0}^{|A|-1} p_{i,j} = 1$ et $pP = p$.

Posons

$$\mu([a_{-i} \dots a_{-1} . a_0 a_1 \dots a_j]) = p_{a_{-i}} p_{a_{-i}, a_{-i+1}} \dots p_{a_{-1}, a_0} p_{a_0, a_1} \dots p_{a_{j-1}, a_j}.$$

Exercice 35. Montrer que μ définit une mesure T -invariante sur le full-shift.

Exercice 36. Montrer que $Q = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} P^n$ existe.

Puis montrer que $(A^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}, \mu, T)$ est ergodique si et seulement si toutes les colonnes de Q sont identiques.