

TD Intégrales curvilignes et flux

Exercice 1 Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

$$\int_C xy dx + (x + y) dy$$

où C est la parabole d'équation $y = x^2$ pour x variant de -1 à 2 .

$$\int_C 2xy^2 z dx + 3x^2 z dy + \left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}y^2\right) dz$$

où C est la courbe $x = \cos t$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t$, $z = \frac{1}{2} \sin t$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 2 En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer les intégrales curvilignes suivantes:

$$\int_C y dx + x dy$$

où C est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens *direct*).

$$\int_C (x^2 + y) dx + (2x + y^2) dy$$

où C est le carré $ABCD$ avec $A(1, 1)$, $B(2, 1)$, $C(2, 2)$ et $D(1, 2)$ parcouru dans le sens direct.

Exercice 3 En utilisant la formule de Stokes, calculer :

$$\int_C (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz$$

où C est le cercle qui est le bord de la demi-sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et telle que $x + y + z \geq 0$.

La circulation du champ $\vec{\Phi} : (x, y, z) \mapsto (2x + yz, xz, xy)$ le long du cercle de centre O de rayon 1 inclu dans le plan xOy .

Exercice 4 On donne le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$.
Soit le champ de vecteurs $\vec{\Phi}(x, y, z) = ((x + y)z^2, (y + z)x^2, (z + x)y^2)$.

Calculer les flux de $\vec{V}$ et $\vec{\Phi}$ à travers la sphère de rayon R .

Exercice 5 Calculer le flux du champ de vecteurs (x^2, y^2, z^2) à travers la sphère S d'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$