

TD Intégrales de surfaces et flux

Exercice 1 Soient $\alpha > 0$ et $h > 0$.

Calculer l'aire de la surface hélicoïdale définie par :

$$x = at \cos \theta, \quad y = at \sin \theta, \quad z = h\theta,$$

pour $(\theta, t) \in [0; \pi/2] \times [0; 1]$.

Exercice 2 Soient $0 < \alpha < \beta$ et $r > 0$.

Calculer l'aire de la surface Σ définie par :

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x \geq 0, \quad \alpha x \leq z \leq \beta x.$$

Exercice 3 Fenêtre de Viviani

Soit $a > 0$.

Calculer l'aire de la surface Σ définie par :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0, \quad x^2 + y^2 - ax \leq 0.$$

Exercice 4 Un tore est, par définition, la surface engendrée par la rotation d'un cercle inclu dans le plan yOz autour de l'axe Oz .

Soit C le cercle de rayon r centré en $A = (0, a, 0)$ avec $a > r$.

Calculer l'aire du tore engendré par C .

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tel que $f(x, y, z) = xy$.

Calculer

$$\iint_{\Sigma} f(M) dS,$$

où $\Sigma = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2 = 1\}$.

Exercice 6 Calculer le flux du champ $\vec{\Phi}$ à travers la surface Σ dans les exemples suivants :

$\vec{\Phi}(x, y, z) = (y, x, y + x)$ et Σ est le triangle $x + 2y + z = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z = 0$.

$\vec{\Phi}(x, y, z) = (y, x, z)$ et Σ est la demi sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

$\vec{\Phi}(x, y, z) = (y^2, x^2, z)$ et Σ est la partie du cylindre définie, en coordonnées cylindriques, par :

$$0 \leq z \leq h, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad r = a, \quad \text{avec } a, h > 0 \text{ fixés.}$$