Exercice 1 Une maison possède deux systèmes de chauffage, l'un de base et l'autre d'appoint. On dira qu'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, et dans l'état 2 si les deux systèmes fonctionnent.

Si un jour on est dans l'état 1, on estime qu'on y reste avec un probabilité 1/2. Par contre si l'on est dans l'état 2, le lendemain la maison est chaude et l'on passe à l'état 1 avec probabilité 3/4.

Soit X_n l'état du système au jour n. On admet que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène.
1) Déterminer sa matrice de transition et son graphe.
2) On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$. Déterminer une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}. En déduire une expression de p_n en fonction de p_0. Déterminer $\lim_{n\to\infty} p_n$.
3) Sachant que l'on est dans l'état 1 un dimanche, trouver la probabilité d'être dans le même état le dimanche suivant.
4) Montrer que si un jour on se trouve dans l'état 1 avec probabilité 3/5, alors il en est de même tous les jours qui suivent.
5) Chaque journée dans l'état 1 coûte 1 euros, dans l'état 2 coûte 2 euros, et chaque transition d'un état vers l'autre coûte 0,5 euros. Calculer le coût moyen d'une journée dans la situation précédente.

Exercice 2 Un message pouvant prendre deux formes différentes ("oui" et "non") est transmis à travers n intermédiaires. On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec une probabilité p, $0 < p < 1$, ou le déforme en son contraire avec probabilité $1 - p$. Les intermédiares sont indépendants.
1) Modéliser ce système par une chaîne de Markov à 2 états $\{-1, 1\}$.
2) Donner la matrice P et le graphe associés. La chaîne est elle irreductible ?
4) On cherche à calculer la probabilité que l'information transmise par la n-ième personne soit correcte.

a) Montrer que cette probabilité vaut

$$\mathbb{P}(X_n = X_0|X_0 = -1)\mathbb{P}(X_0 = -1) + \mathbb{P}(X_n = X_0|X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1).$$

b) Calculer cette probabilité en fonction de p.
c) Que se passe t-il lorsque n tend vers $+\infty$?
d) Donner la loi asymptotique de cette chaîne.

Exercice 3 La lande d'Oz n'est pas bénie par son climat. On n'y jouit jamais de deux jours de beau temps consécutifs. s'il fait beau un jour, il y a autant de chance qu'il y ait de la pluie ou de la neige le lendemain. S'il neige ou s'il pleut, on a une chance sur deux d'avoir le même temps le lendemain. Si à la pluie succède un temps différent, il y a seulement une chance sur les deux restantes que ce soit du beau temps.
Trouver la probabilité à long terme pour une journée de pluie, de neige ou de beau temps.

Exercice 4 Un jeu comprend 12 cases numérotées de 0 à 11, reliées de façon cycliques entres elles. Au départ le joueur place son pion sur la case 0. À chaque tour, le joueur lance le dé à 6 faces et avance son pion du nombre indiqué sur le dé. Les lancers sont supposés indépendants. On note Y_n le numéro de case où se trouve le pion du joueur au n-ième lancer.
1 a) Montrer que $(Y_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène.

b) Déterminer sa matrice de transition P. La chaîne admet elle une probabilité stationnaire ?

2 a) Vérifier que la matrice P est bistochastique :

$$\sum_{x\in\mathcal{S}} P(x,y) = 1 \qquad \forall y \in \mathcal{S}.$$

Montrer que P^n est également bistochastique pour tout entier $n \geq 1$.

2 b) En déduire la la probabilité stationnaire de la chaîne. Que vaut $\lim_n \mathbb{P}(Y_n = 0)$?

Exercice 5 Soient d balles ($d > 1$), numérotées de 1 à d et réparties dans deux urnes A et B. On tire un nombre $i \in \{1, \dots, d\}$ au hasard, et la balle numéro i est changée d'urne.
Soit X_n le nombre de balles dans l'urne A après n tirages successifs indépendants. La chaîne $(X_n)_n$ est appelée *chaîne d'Ehrenfest.*
1) On admet que $(X_n)_n$ définit une chaîne de Markov. Vérifier qu'elle est homogène et déterminer sa matrice de transition P. Montrer que la chaîne est irréductible et récurrente.
2) Si X_0 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(d, \frac{1}{2})$, déterminer la loi de X_n. Qu'en déduit on ?
3) On suppose dans cette question que $d = 3$. Soit T_0 le nombre de tirage nécessaire pour vider A (on tire au moins une fois même si A est vide).
    a) Calculer $\mathbb{P}(T_0 = n | X_0 = x)$ pour tout état x et $n = 1, 2, 3$.
    b) Calculer P, P^2, P^3. Si $\mu_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ est la loi initiale de la chaîne, déterminer les lois de X_1, X_2, X_3.
4) Montrer qu'il existe deux constantes a, b telles que pour tout état $x \in \mathcal{S}$, $\sum_{y \in \mathcal{S}} y P(x, y) = ax + b$. En déduire $\mathbb{E}(X_n | X_0)$ et $\lim_n \mathbb{E}(X_n | X_0)$.
5 a) Sans tenir compte de la question 2), déterminer directement la distribution stationnaire.
    b) Déterminer $\lim_n P^n(x, y)$. Application : $d = 4$ $X_0 = 0$.
6) On modifie la chaîne de la façon suivante. Lorsque la balle a été extraite d'une urne suivant la procédure décrite, on tire au sort (avec des probabilités égales) l'urne A ou B dans laquelle on la place.
    a) Déterminer la matrice de transition P, et la distribution stationnaire.
    b) Déterminer $\lim_n P^n(x, y)$. Application : $d = 4$ $X_0 = 0$.

Exercice 6 On considère une chîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathcal{S} = \mathbb{N}$, de matrice de transition P définie par

$$P(x, 0) = p_x \in]0, 1[, \qquad P(x, x+1) = 1 - p_x, \qquad x \in \mathbb{N}.$$

1) Dessiner le graphe de cette chaîne et montrer qu'il est irréductible.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(P_x)_{x \in \mathbb{N}}$ pour que cette chaîne soit récurrente.
3) Dans le cas où p_x est indépendant de x et a la valeur p, montrer que la chîne est récurrente positive et calculer sa probabilité stationnaire.