

Exercice 1 1) Donner un algorithme de simulation par inversion pour la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$, de densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

2) Donner un algorithme de simulation par inversion pour la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p \in (0, 1)$. on rappelle qu'une v.a.r X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ si pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

Exercice 2 Soient $X_1, \dots, X_{25}$ des variables i.i.d de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 20]$.

1) En utilisant le théorème central limit, donner une approximation de la densité de

a) leur somme $S_{25} = X_1 + \dots + X_n$.

b) Leur leur somme normalisée $S_{25}^* = \frac{S_{25} - \mu}{\sqrt{25\sigma^2}}$ où μ, σ^2 désignent l'espérance et la variance de la loi uniforme sur $[0, 20]$

2) Écrire un programme qui simule la variable S_{25} . Calculer 1000 valeurs par cette simulation. Dessiner l'histogramme des valeurs de S_{25} et le comparer avec les approximations du 1).

Faire de même avec S_{25}^*

3) En utilisant l'inégalité de Chebycheff, donner une approximation de

$$F(x) := \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{25}}{25} - 10\right| \geq x\right) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

Tracer le graphe de la fonction approximation.

Donner une approximation de $F(x)$ en utilisant les résultat de 1).

Simuler 1000 valeurs de S_{25} , et tracer le graphe de F à partir de ces résultats.

Comparer les différentes approximations.

Exercice 3 1) Pour chacune des densités f ci-dessous, écrire un programme pour simuler n variables indépendantes sur l'intervalle $[0, 1]$ et calculer leur somme S_n .

a) $f(x) = 1$

b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = 3x^2$

d) $f(x) = 4|x - 1/2|$

e) $f(x) = 2 - 4|x - 1/2|$

2) Pour $n = 25$, calculer 1000 valeurs pour cette simulation et tracer l'histogramme des résultats. Comparer les résultats obtenus avec la densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mathbb{E}(S_{25}), \text{Var}(S_{25}))$.

Même chose avec $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$.

3) Trouver le n minimal pour chacune des densités pour que l'histogramme corresponde à une loi normale.