Exercice 1 Soient X et Y deux v.a. indépendantes et de même loi de Cauchy, *i.e.* de densité

$$\gamma(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que X n'admet aucun moment.
2. Montrer que le produit XY a pour densité $\dfrac{2}{\pi^2}\dfrac{\log|x|}{x^2-1}$.

   Indication $\dfrac{a-1}{(1+s)(a+s)} = \dfrac{1}{1+s} - \dfrac{1}{a+s}$.
3. Montrer que $\log|X|$ a la densité f donnée par $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$.

En déduire que $f * f(x) = \dfrac{4}{\pi^2}\dfrac{x}{e^x+e^{-x}}$.

Exercice 2 Soit $X = (X_1, X_2, X_3)^t$ un vecteur gaussien $\mathcal{N}(0, V)$ où

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On définit le vecteur $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)^t$ par

$$\begin{cases} Y_1 & = X_1 + X_3 \\ Y_2 & = \alpha X_1 + 2X_2 + \beta X_3 \\ Y_3 & = -X_1 - X_2 + X_3. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Y.
2. Pour quelles valeurs de α et β, (Y_1, Y_2) et (Y_2, Y_3) sont elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi du couple (Y_1, Y_3).

Exercice 3 *CNS d'indépendance de $\overline{X}$ et S^2.*
Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. i.i.d. d'espérance m et de variance σ^2 finie. On pose :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \qquad \Sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2, \qquad \text{et} \qquad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2.$$

1) Montrer que Σ^2 converge presque sûrement vers σ^2 et que $E(\Sigma^2) = \sigma^2$.
Qu'en est il de S^2 ?

2) On suppose que les (X_i) suivent la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

a) Quelles sont les lois de $\overline{X}$ et $\dfrac{n\Sigma^2}{\sigma^2}$?

b) Montrer que $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes.

3) On suppose à présent que les X_i sont indépendants de même loi inconnue et que les variables $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes.
Soit ϕ la fonction caractéristique de X_1.

a) Montrer que $nS^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2$.

b) Soit $m = 0$. Calculez $E(nS^2)$ en fonction de σ^2 et montrez que $E(nS^2 e^{itn\overline{X}}) = (n-1)\sigma^2(\phi(t))^n$ pour tout réel t.

En déduire que ϕ est solution de

$$\frac{\phi''}{\phi} - (\frac{\phi'}{\phi})^2 = -\sigma^2$$

$$\text{avec } \phi(0) = 1, \qquad \phi'(0) = 0.$$

En déduire que X_i est de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. *On pourra poser pour cela* $\psi(t) = \log(\phi(t))$

c) Montrer que l'on peut se passer de l'hypothèse $m = 0$.

Exercice 4 On dispose d'un échantillon i.i.d. de v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ à valeurs dans $\{1, \ldots, m\}$ ($n >> m$). On souhaite déterminer la loi $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$ de X_1, i.e. ($\pi_i = \mathbb{P}(X_1 = i)$).
On note par $N_i(n)$ le nombre de v.a. X_k qui prennnent la valeur $i \in \{1, \ldots, m\}$.
1. Montrer que le va. de coordonnée $\dfrac{N_i(n) - n\pi_i}{\sqrt{n\pi_i}}$ converge en loi vers la loi normale multidimensionnelle

$$\mathcal{N}\big(0, \mathrm{Id} - \sqrt{\Pi}\ {}^t\sqrt{\Pi}\big),$$

où $\sqrt{\Pi}$ désigne le vecteur $(\sqrt{\pi_1}, \ldots, \sqrt{\pi_m})$.
2. Soient Z un vecteur aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id} - \sqrt{\Pi}\ {}^t\sqrt{\Pi})$ et A une isométrie de $\mathbb{R}^m$ telle que $A\sqrt{\Pi} = (0, \ldots, 0, 1)$.
Déterminer la loi de $V = AZ$.
3. En déduire la loi de $f(Z) = \sum_{i=1}^m Z_i^2$.
En déduire le théorème de Pearson

$$D_n(\Pi) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(N_i(n) - n\pi_i)^2}{n\pi_i} \to^{\mathcal{L}} \chi^2_{m-1}.$$

5. Application
Un dé est lancé 600 fois. On observe que les faces apparaissent un certain nombre de fois indiqué dans le tableau suivant :

1	2	3	4	5	6
100	94	103	89	110	104

Peut on dire avec une probabilité de $0,9$ si le dé est truqué ?