Exercice 1 Soient X, Y, Z trois v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[-1, 1]$.
Calculer la loi de $X + Y$, $\frac{1}{2}(X + Y)$, $\frac{1}{3}(X + Y + Z)$.

Exercice 2 1) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d. de loi exponenetielle de paramètre $\alpha > 0$. Notons $X_{(1)} = \min\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $X_{(n)} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$.
Déterminer la fonction de répartition $X_{(n)}$, puis celle de $X_{(1)}$.
Déterminer leurs fonctions de densité.
Déterminer dans ce cas la fonction de densité du couple $(X_{(1)}, X_{(n)})$.
Déterminer la fonction de densité de la variable $\frac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}$.

Exercice 3 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d. de loi $\mathbb{P}$. On suppose que $\mathbb{P}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ. On considère la *statistique d'ordre* notée φ définie par :

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}) \end{array}$$

où $(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$ désigne l'ordonnement par ordre croissant des $\{x_1, \ldots, x_n\}$, i.e. $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$.
On s'intéresse à la variable aléatoire $\varphi(X_1, \ldots, X_n) = (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ et on cherche, en particulier, à déterminer sa densité.

Dans ce but, pour toute permutation s de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, notons

$$\begin{array}{cccc} \varphi_s : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_{s(1)}, \ldots, x_{s(n)}) \end{array}$$

On désigne par $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.

1) Montrer que φ prend ses valeurs λ-presque sûrement dans :

$$U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \ \ x_1 < \ldots < x_n\}.$$

2) Montrer que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique permutation s de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ t.q. $\varphi(x) = \varphi_s(x)$.
Pour $s \in \mathcal{S}_n$, notons $O_s = \varphi_s^{-1}(U)$. En déduire une expression de φ en fonction des φ_s et des fonctions indicatrices de O_s.
3) Montrer que la densité de la loi de la variable $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ est :

$$n! \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) \mathbf{1}_\Omega(x_1, \ldots, x_n),$$

où f est la densité de la loi $\mathbb{P}$.
4) Si $\mathbb{P}$ désigne la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$, déterminer la loi de $\varphi(X_1, \ldots, X_n) = (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$.
5) Montrer que les n v.a. $Z_1 := X_{(1)}$, $Z_2 := X_{(2)} - X_{(1)}, \ldots, Z_n := X_{(n)} - X_{(n-1)}$ sont indépendantes et que la densité de Z_k est

$$t \mapsto (n - k + 1)\alpha e^{-(n-k+1)\alpha t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t).$$

En déduire $\mathbb{E}(X_{(k)})$.

Exercice 4 Pour $a > 0$, on pose $\Gamma(a) := \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}dx$. On rappel que la loi gamma de paramètres a et $\lambda > 0$, notée $\Gamma(a, \lambda)$ a pour densité

$$\gamma_{a,\lambda} = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,+\infty]}(x).$$

1. Vérifier que $\Gamma(a)$ est défini pour $a > 0$, montrer que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ et calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit X une v.a. de loi $\Gamma(a, \lambda)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
3. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois respectives $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$.

3.a. Montrer que $X + Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes et calculer leurs lois de probabvilité. En déduire que

$$B(a, b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

3.b Donner la loi de probabiltié de $\frac{X}{Y}$.

3.c. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a. indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, donner la loi de probabilité de $X_1 + \cdots + X_n$.

4.a. Soit Y une v.a. gaussienne centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que Y^2 suit la loi gamma $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En déduire la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

4.b. Si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont n v.a. indépendnantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, donner la loi de probabilité de $Z = Y_1^2 + \cdots + Y_n^2$ et calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$.

Exercice 5 Soit T une v.a.r. telle que pour tout $t, s \geq 0$,

$$\mathbb{P}(T > t + s) = \mathbb{P}(T > t)\mathbb{P}(T > s).$$

Le but de l'exercice est de montrer que T suit une loi exponentielle.
1. Montrer que si $\mathbb{P}(T > 0) > 0$ alors $\mathbb{P}(T > t) > 0$ pour tout $t > 0$.
2. On définit l'application $f(t) = \log \mathbb{P}(T > t)$, $t > 0$. Montrer que $f(x) = xf(1)$ pour tout rationnel x positif, puis pour tout réel x positif.
3. Conclure.