Exercice 1 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p_1), \ldots, \mathcal{G}(p_n)$ avec $p_1, \ldots, p_n \in]0,1[$.
1. Calculer la fonction génératrice de X_1.
2. Montrer que $\min(X_1, \ldots, X_n)$ suit une loi $\mathcal{G}(1-(1-p_1)\cdots(1-p_n))$.

Exercice 2 1.a. Soit X_1 une v.a. de loi binomiale de paramètre $n \geq 2$ et $p \in [0,1]$. Calculer la fonction génératrice G_1 de X_1. En déduire $\mathbb{E}(X_1)$ et $\operatorname{Var}(X_1)$.
1.b. Soient X_1, Y_1 deux v.a. indépendantes de lois respectives binomiales $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$. Donne la loi de probabilité de X_1+Y_1, en utilisant les fonctions génératrices.
2.a. Soit X_2 une v.a. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer la fonction génératrice G_2 de X_2. En déduire $\mathbb{E}(X_2)$ et $\operatorname{Var}(X_2)$.
2.b. Soient X_2 et Y_2 deux v.a. indépendantes de lois respectives de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Donner la loi de probabilité de X_2+Y_2.
3. On suppose que $n \to \infty$ et $p \to 0$ de sorte que $np \to \lambda$. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$G_1(s) \to G_2(s).$$

Exercice 3 On effectue des essais indépendants dont la probabilité de succès est constante égale à p, $0 < p < 1$, jusqu'à obtenir un nombre $m \geq 1$ fixé à l'avance de succès. Soit X le nombre d'essais nécessaires.
1. Calculer le loi de probabiltié de X.
2. Calculer la fonction génératrice de X.
3. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{m-1}{X-1}\right) = p$ et que $\mathbb{E}\left(\frac{m}{X}\right) \neq p$, on suppose ici $m > 1$.

Exercice 4 1. On jette deux dés indépendants non pipés. Calculer la probabilité pour que la somme des points obtenue soit égale à un entier donné k.
2. Peut-on truquer deux dés indépendants de façon que la somme des points obtenue en les lançant soit équirépartie ?

Exercice 5 Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et équidistribuées. Soit N une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendante de la suite X_n. On définit la v.a. Z par

$$Z(\omega) := \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

1. Calculer la fonction génératirce de Z.
2. En déduire $\mathbb{E}(Z)$, $\operatorname{Var}(Z)$ lorsque $\mathbb{E}(Z) < +\infty$.
3. Le nombre d'accident en une semaine dans une usine est v.a. de moyenne μ et de variance σ^2. Le nombre d'individus blessé s dans un accident est une v.a. de moyenne ν et de variance τ^2. Les nombres d'individus blessés dans des accidents différents sont indépendants eux et indépendants du nombre d'accident.

Donner la moyenne et la variance du nombre d'individus blessés en une semaine.

Exercice 6 On étudie la transmission du nom X porté à l'origine par un seul homme. Cet homme forme la génération 0. Les descendants mâles directs de la n-ième génération forment la $(n+1)$-ième génération et la probabilité p_k qu'un homme ait k fils $(k = 0, 1, \dots)$ est constante au cours des générations. On suppose que $0 < p_0 < 1$. Soit Z_n le nombre d'hommes portant le nom X à la n-ième génération. On pose

$$x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) \qquad \text{et} \qquad G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

1. Donner une relation de récurrence permettant de calculer la fonction génératrice G_n de Z_n
2. Montrer que G est strictement croissante sur $[0, 1]$, qu'elle est convexe sur $]0, 1[$ puis donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette convexité soit stricte.

   En déduire que l'équation $G(x) = x$ admet exactement une ou deux racine(s) sur $[0, 1]$

   Disctuer la valeur $\lim_n x_n$ en fonction de $m = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k$.

   Conclure sur l'extinction du nom X.