UNIVERSITE DE BOURGOGNE DIJON
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
LABORATOIRE DE TOPOLOGIE U.M.R. 5584

Thèse

Présentée par

Frédéric PACCAUT

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE BOURGOGNE

Spécialité : Mathématiques

Propriétés Statistiques De Systèmes Dynamiques Non Markoviens

Soutenue publiquement le 22 juin 2000 devant le Jury composé de

Pierre COLLET	Président
Gerhard KELLER	Rapporteur
Sandro VAIENTI	Rapporteur
Jérôme BUZZI	Examinateur
Jean-Marc GAMBAUDO	Examinateur
Stefano LUZZATTO	Examinateur
Bernard SCHMITT	Directeur de thèse

A Emmanuelle,

J'ai découvert les probabilités en Licence de Mathématiques à Dijon avec Bernard Schmitt. La matière m'a plu et cet intérêt a été renforcé par le cours de Maîtrise de Patrick Gabriel. Mais c'est aussi la personnalité de Bernard Schmitt que j'ai appréciée : sa décontraction, sa disponibilité (en temps comme en esprit). Je lui suis très reconnaissant d'avoir bien voulu diriger cette thèse avec toutes ces qualités.

Mon travail a débuté grâce à des notes de Pierre Collet sur les temps de retour, je le remercie vivement pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Les nombreuses remarques et questions de Gerhard Keller et Sandro Vaienti ont permis d'améliorer certains résultats, je leur adresse mes remerciements sincères pour leur examen minutieux.

Les discussions et collaborations avec Jérôme Buzzi ont toujours été fructueuses et ses idées (qui sont toujours les bonnes) très utiles, je le remercie d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je remercie cordialement Jean-Marc Gambaudo et Stefano Luzzatto pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour avoir accepté de le juger.

L'atmosphère au Laboratoire de Topologie est très chaleureuse et l'intégration des nouveaux doctorants, naturelle. Il faut souligner cette ambiance exceptionnelle. Je dois dire que ces trois années n'auraient pas été aussi agréables sans ces (tout petits) bureaux et cette complicité avec les autres thésards. Je tiens à remercier particulièrement Véronique, ma "grande soeur mathématique".

Je n'oublie pas Florence Gadenne, Laurence Flachet, Jean-Pierre Troalen, Sylvie Vottier et Jacqueline Alexandre qui ont toujours été disponibles pour résoudre mes nombreux problèmes administratifs, informatiques et reprographiques.

Mais ce travail n'aurait pas été mené à bien sans le soutien (dans tous les sens du terme) de mes parents. Je tiens ici à leur rendre hommage.

Table des matières

Introduction générale

Cette thèse porte sur l'étude des propriétés statistiques de systèmes dynamiques essentiellement uniformément dilatants en toutes dimensions, avec discontinuités. Dans ce cadre, les résultats qui existent concernent l'existence de mesures invariantes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Le principal problème posé par les discontinuités est qu'il n'est pas possible de travailler avec des fonctions Hölder ou Lipschitz (celles-ci sont trop régulières pour être préservées par l'opérateur de transfert). Différentes notions de variation bornée ont ainsi été introduites [K1], [Sa], [Ts], [AZ], [Cw], et sous certaines conditions, parfois difficiles à vérifier, sont prouvées l'existence de mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et la décroissance des corrélations pour des observables à variation bornée, soit en utilisant des méthodes de métrique projective, soit la quasicompacité de l'opérateur. Le seul résultat pour des potentiels plus généraux est celui de J. Buzzi [Bu2] qui construit une mesure conforme en se basant sur [DU] et montre l'existence d'états d'équilibre pour des applications affines par morceaux de $\mathbb{R}^d$. Après avoir rappelé des résultats généraux de théorie ergodique, la première partie porte sur l'existence de mesures conformes pour des systèmes multidimensionnels inversibles par morceaux associés à des potentiels réguliers. Ce qui fait la généralité de ces résultats est qu'une seule hypothèse est nécessaire : la pression topologique du bord est strictement inférieure à la pression totale. Dans une deuxième partie, sous une condition supplémentaire qui assure que le système est assez proche du markovien (et qui en dimension un est impliquée par la précédente), on montre que l'opérateur de transfert est quasicompact sur un espace de fonctions à variation bornée, obtenant ainsi l'existence de densités invariantes et la décroissance exponentielle des corrélations. Dans la troisième partie, les propriétés de récurrence de tels systèmes sont étudiées, nous montrons que, bien que ces systèmes ne soient pas φ-mélangeants et que leurs états d'équilibre ne soient pas des mesures de Gibbs (conditions nécessaires aux résultats généraux développés dans [GS], [CGS]), la loi du temps d'entrée dans un cylindre tend vers une loi exponentielle et les fluctuations des temps de retour autour de l'entropie sont lognormales.

A Mesures invariantes

Un système dynamique, même simple et déterministe, peut présenter des comportements "imprévisibles" : par exemple, si on choisit deux conditions initiales voisines, lorsque l'on fait évoluer le système, après un temps fini, le comportement des deux orbites peut être complètement différent : c'est ce qu'on nomme "comportement chaotique". De telles évolutions montrent qu'il est inespéré d'obtenir des informations satisfaisantes sur le système en l'étudiant orbite par orbite. Ceci motive l'étude statistique de tels systèmes.
Le problème est donc de trouver des propriétés qui sont vérifiées par des ensembles assez significatifs d'orbites. La grosseur de ces ensembles est donnée par une mesure borélienne sur l'espace considéré, invariante par la transformation, et les ensembles typiques sont de mesure pleine.
Toutefois, un ensemble formé d'un seul point peut être typique pour une mesure de Dirac et ce cas ne donne pas beaucoup d'information sur le système. C'est pourquoi on doit demander un peu plus à cette mesure qui nous donnera le comportement statistique du système : elle doit avoir les mêmes ensembles de mesure nulle qu'une mesure de référence (du type mesure de Liouville ou mesure de Lebesgue), c'est l'absolue continuité.
Toutes les mesures considérées ici sont des mesures de probabilités.

Définition A.1 *Soit X espace mesurable et $T : X \longrightarrow X$. μ est T-invariante si, pour tout ensemble mesurable A :*

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$$

Ceci est encore équivalent à : $\int f \circ T d\mu = \int f d\mu$ pour tout $f \in L^1_\mu$.

Exemple $T(x) = 2x \mod 1$

Chaque ensemble A donne par image inverse deux ensembles de longueur la moitié de la longueur de A. Donc, dans cet exemple, la mesure de Lebesgue est invariante.

Le but de la théorie ergodique est d'essayer de décrire le comportement typique des orbites d'un ensemble de mesure positive de points. S'il existe un ensemble I invariant par T, de mesure positive mais différente de 1, alors son complémentaire est également invariant de mesure positive, c'est-à-dire que l'espace X est partagé en deux sous-ensembles I et I^c sur lesquels la dynamique évolue de manière indépendante ; on est alors ramené à l'étude des systèmes $(I, T_{|I}, \mu_{|I})$ et $(I^c, T_{|I^c}, \mu_{|I^c})$. C'est l'ergodicité qui assure qu'on ne peut pas décomposer l'espace en de tels sous-ensembles.

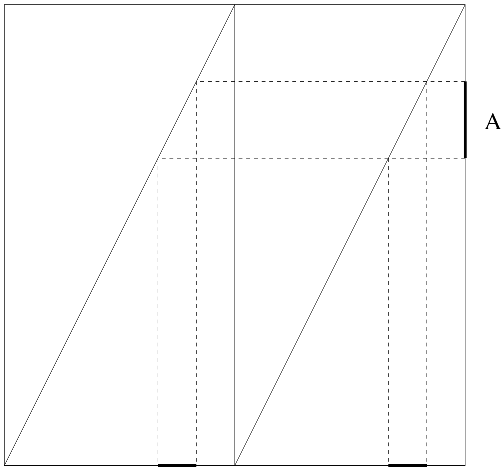

FIG. 1 – $T(x) = 2x \mod 1$

Définition A.2 (X, T, μ) *système dynamique mesurable avec* μ T*-invariante.* (X, T, μ) *est ergodique si pour tout mesurable* A *:*

$$T^{-1}A = A \implies \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1$$

L'ergodicité est encore équivalente à : pour toute fonction mesurable f :

$$f \circ T = f \quad \mu \text{ presque sûrement} \implies f = \text{cste} \quad \mu \text{ presque partout}$$

Théorème A.1 : Décomposition ergodique
Soit X *espace métrisable compact et* T *continue, toute mesure de probabilité Borélienne invariante* μ *se décompose en une intégrale de mesures de probabilité Boréliennes invariantes ergodiques. Plus exactement, il existe une partition (modulo des ensembles de mesure nulle) de* X *en sous ensembles invariants* X_α, $\alpha \in A$ *et des mesures* μ_α *à support dans* X_α *telles que, pour toute fonction* f *:*

$$\int f \, d\mu = \int \int f \, d\mu_\alpha \, d\alpha$$

Un premier théorème, dû à Poincaré, concerne la récurrence d'un ensemble typique de points :

Théorème A.2 : Théorème de récurrence de Poincaré
Soit (X, T, μ) *un système dynamique mesurable et* B *mesurable tel que* $\mu(B) > 0$*, alors* μ*-presque tout point de* B *revient une infinité de fois dans* B*.*

Une question naturelle est : combien de fois en moyenne un point récurrent revient-il ? La réponse est apportée par le théorème ergodique.

Théorème A.3 : Théorème ergodique de Birkhoff
Soit (X, T, μ) un système dynamique mesurable et $f \in L^1_\mu$:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f \circ T^i \overset{\mu.p.s}{\longrightarrow} \tilde{f}$$

avec $\tilde{f} \in L^1_\mu$, $\tilde{f} \circ T = \tilde{f}$ μ-presque partout et $\int \tilde{f} d\mu = \int f d\mu$ (si l'espace est de mesure finie).

Si de plus, (X, T, μ) est ergodique, alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f \circ T^i \overset{\mu.\text{p.s}}{\longrightarrow} \int f d\mu$$

Et si on applique ceci à $f = \mathbf{1}_B$, on obtient que le nombre moyen de retours d'un point récurrent dans son ensemble B tend vers la mesure de B.
Une caractérisation équivalente de l'ergodicité est la suivante : pour tous A et B mesurables :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu(A \cap T^{-i}B)}{\mu(A)} = \mu(B)$$

ce qui signifie que, en moyenne, la portion des points de A dont l'orbite rencontre B tend vers la mesure de B. On peut demander un peu plus, c'est-à-dire que la portion des points de A qui rencontrent B en un temps n tende vers la mesure de B lorsque n tend vers l'infini : c'est le mélange fort.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(A \cap T^{-n}B)}{\mu(A)} = \mu(B)$$

Si maintenant on a une partition $\mathcal{P}$ de l'espace X, on définit $\mathcal{P}_n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{P}$ c'est-à-dire qu'un atome de $\mathcal{P}_n$ s'écrit $P = \cap_{i=0}^{n-1} P_i$ avec $P_i \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\infty = \bigvee_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}_i$. On notera $\sigma(\mathcal{P}_n)$ et $\sigma(\mathcal{P}_\infty)$ les tribus engendrées par les partitions correspondantes.
Il existe de nombreuses définitions qui décrivent la façon dont se fait la convergence dans le mélange fort, c'est -à-dire la vitesse à laquelle le système perd la mémoire du passé ; citons-en deux.

- $(X, T, \mu, \mathcal{P})$ est φ-mélangeant si il existe $(v_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ suite décroissante positive tendant vers zéro telle que, pour tout $A \in \sigma(\mathcal{P}_n)$ et $B \in \sigma(\mathcal{P}_\infty)$:

$$|\mu(A \cap T^{-(n+\ell)}B) - \mu(A)\mu(B)| \leqslant v_\ell \mu(A)\mu(B)$$

- $(X, T, \mu, \mathcal{P})$ est α-mélangeant si il existe $(v_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ suite décroissante positive tendant vers zéro telle que, pour tout $A \in \sigma(\mathcal{P}_n)$ et $B \in \sigma(\mathcal{P}_\infty)$:

$$|\mu(A \cap T^{-(n+\ell)}B) - \mu(A)\mu(B)| \leqslant v_\ell \mu(B)$$

Nous verrons que ces formes de mélange sont très importantes pour étudier les propriétés de récurrence.
Lorsque (X, T, μ) est mélangeant, le type de mélange est fortement reliée à la vitesse de décroissance des corrélations $C_n(f, g) = |\mu(f \circ T^n g) - \mu(f)\mu(g)|$ et aux espaces fonctionnels auxquels appartiennent les observables f et g.

B Formalisme thermodynamique

Le formalisme thermodynamique, développé par Ya. G. Sinai [S] et D. Ruelle [Ru], vise à étendre des notions classiques de thermodynamique et de mécanique statistique aux systèmes dynamiques. En thermodynamique, si on expose un système à une source d'énergie extérieure, son état évolue et l'état d'équilibre est caractérisé par le fait qu'il maximise l'énergie libre (qui est homogène à une entropie plus une énergie moyenne).
A un système dynamique, on associe un potentiel φ ($\varphi(x)$ représente l'énergie d'interaction de x avec le reste du système) ; on définit la pression mesurée pour m mesure de probabilité invariante par T :

$$P_\varphi(m, T) = h_m(T) + \int \varphi dm$$

où $h_m(T)$ est l'entropie métrique du système (T, m).
La pression mesurée est homogène à une énergie libre et un état d'équilibre μ est une mesure invariante qui maximise cette quantité parmi toutes les mesures invariantes par T :

$$P_\varphi(\mu, T) = \sup_{m \in M(X,T)} \left(h_m(T) + \int \varphi dm \right)$$

Définissons tout d'abord l'entropie métrique d'une mesure en s'appuyant sur la théorie de l'information.
Pour une source qui émet des symboles $s_1, \ldots, s_n$ avec des probabilités $p_1, \ldots, p_n$, on a une incertitude avant l'émission et une information après l'émission. Pour obtenir une notion d'information respectant plusieurs principes :

- plus l'incertitude sur le symbole est grande, plus l'information une fois le symbole émis doit l'être.
- l'information doit être additive sur les évènements indépendants,

une définition s'impose :

$$I(s_i) = -\log p_i$$

et l'information moyenne est l'entropie du système :

$$H = -\sum_i p_i \log p_i$$

Pour un système dynamique (X, T), une partition $\mathcal{P}$ et une mesure invariante par la transformation μ, on définit de même l'information et l'entropie de la partition $\mathcal{P}$:

Définition B.1

$$I(\mathcal{P})(x) = -\log \mu(\mathcal{P}(x)) \quad \textit{pour } \mu \textit{ presque tout } x \in X$$

$$H_\mu(\mathcal{P}) = \int_X I(\mathcal{P})(x) d\mu(x) = -\sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log \mu(P)$$

On définit de même information et entropie conditionnelle par rapport à une σ-algèbre $\mathcal{B}$:

Définition B.2

$$I(\mathcal{P}/\mathcal{B})(x) = -\sum_{P \in \mathcal{P}} \log \mu(P/\mathcal{B}) \mathbf{1}_P(x)$$

$$H(\mathcal{P}/\mathcal{B}) = -\int_X I(\mathcal{P}/\mathcal{B})(x) d\mu(x)$$

De nombreuse propriétés techniques de l'entropie conditionnelle (que l'on peut retrouver de façon synthétique sur la dernière page de [Bi]) permettent de montrer le théorème suivant :

Théorème B.1 *(entropie de la transformation T par rapport à la partition $\mathcal{P}$)*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{P}_n) = \lim_{n \to \infty} H\left(\mathcal{P}/\sigma\left(\bigvee_{k=1}^{n} T^{-k}\mathcal{P}\right)\right) = H\left(\mathcal{P}/\sigma\left(\bigvee_{k=1}^{\infty} T^{-k}\mathcal{P}\right)\right) = h(\mathcal{P}, T)$$

Définition B.3 *(entropie de la transformation T)*

$$h(T) = \sup_{\mathcal{P}} h(\mathcal{P}, T)$$

Un moyen de calculer l'entropie associée à une mesure est donné par le théorème suivant (dû à Sinai) :

Théorème B.2 *Si η est un générateur, c'est-à-dire si $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n}\eta$ est une partition triviale, alors :*

$$h_\mu(T) = h_\mu(T, \eta)$$

Théorème B.3 : Théorème de Shannon Mac Millan Breimann
Soit (X, T, μ) système dynamique mesurable ergodique et $\mathcal{P}$ partition dénombrable avec $H(\mathcal{P}) < \infty$:

$$\frac{1}{n} I \left(\bigvee_{0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{P} \right) \overset{\mu\ p.s.}{\longrightarrow} h_\mu(\mathcal{P}, T)$$

Corollaire B.1 *Soit (X, T, μ) système dynamique mesurable ergodique et $\mathcal{P}$ partition avec $H(\mathcal{P}) < \infty$, pour μ presque tout $x \in X$:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}_n(x)) = -h_\mu(\mathcal{P}, T)$$

Notons $g = \exp(\varphi)$ et $g_n = \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ T^i\right)$.
On définit la pression topologique du système (X, T, g) qui s'écrit, si $\mathcal{P}$ est une partition génératrice et formées d'ouverts compacts :

$$P_{\text{top}}(X, T) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \sup_P g_n$$

La pression topologique d'un sous-ensemble S de X est :

$$P_{\text{top}}(S, T) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_n \\ \bar{P} \cap S \neq \emptyset}} \sup_P g_n$$

(lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur la transformation T, on notera $P_{\text{top}}(X)$ et $P_{\text{top}}(S)$).
Dans le cadre symbolique [DGS], on a le principe variationnel suivant :

$$P_{\text{top}}(X, T) = \sup_{m \in M(X,T)} P_\varphi(m, T)$$

Par conséquent, si μ est un état d'équilibre, il vérifie :

$$P_{\text{top}}(X, T) = P_\varphi(\mu, T)$$

C Mesures conformes

Considérons un système relativement simple : $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$de classe C^2 et surjective par morceaux sur un nombre fini de morceaux $P_1, \ldots, P_n$. La mesure naturelle sur l'intervalle est la mesure de Lebesgue ℓ et nous voudrions savoir si cette mesure se comporte bien par rapport à la dynamique. En fait, $\ell \circ T$ est absolument continue par rapport à ℓ et

Lemme C.1
$$\left(\frac{d\ell \circ T}{d\ell}\right)_{|P_i} = |T'|_{|P_i}$$

Preuve : Il suffit de faire un changement de variables : soit $A \subset P_i$. D'une part :

$$\ell(TA) = \int \mathbf{1}_A d\ell \circ T = \int_{P_i} \mathbf{1}_A d\ell \circ T = \int_{P_i} \mathbf{1}_A \left(\frac{d\ell \circ T}{d\ell}\right)_{|P_i} d\ell$$

D'autre part, puisque T est surjective sur le morceau P_i :

$$\ell(TA) = \int_{TP_i} \mathbf{1}_A \circ T^{-1}(x) d\ell(x)$$

Posons $y = T_{P_i}^{-1}(x)$ on a $d\ell(x) = |T'|(T_{P_i}^{-1}(x))d\ell(y) = |T'(y)|d\ell(y)$ et

$$\ell(TA) = \int_{P_i} \mathbf{1}_A(y)|T'|(y)d\ell(y)$$

ceci est vrai pour tout sous-ensemble mesurable de P_i ce qui donne l'égalité souhaitée. ■

Effectuons maintenant un autre changement de variables qui va encore exprimer l'absolue continuité de $\ell \circ T$ par rapport à ℓ. Soit $f \in L^1_\ell$:

$$\int f(x)d\ell(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_{P_i} f(x)d\ell(x)$$

Posons alors $y = T(x)$ sur chaque branche d'injectivité de T. $x = T_{P_i}^{-1}(y)$ $d\ell(y) = |T'|(T_{P_i}^{-1}(y))d\ell(x)$ et :

$$\begin{aligned}
\int f(x)d\ell(x) &= \sum_{i=1}^{n} \int_{P_i} f(x)d\ell(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int f \circ T_{P_i}^{-1}(y) \frac{1}{|T'|(T_{P_i}^{-1}(y)} \mathbf{1}_{T(P_i)}(y)d\ell(y) \\
&= \int Lf(y)d\ell(y)
\end{aligned}$$

en notant :

$$Lf = \sum_{i=1}^{n} f \circ T_{P_i}^{-1} \frac{1}{|T'| \circ T_{P_i}^{-1}} \mathbf{1}_{T(P_i)}$$

L est appelé opérateur de tranfert du système $([0,1], T)$. On a donc :

$$\forall f \in L^1_l, \quad \ell(Lf) = \ell(f)$$

On dit que ℓ est une mesure conforme pour le potentiel $\frac{1}{|T'|}$ ce qui est équivalent à l'égalité sur la dérivée de Radon-Nikodyn donnée dans le lemme précédent.

Si on considère maintenant un système plus général (X, T, g) avec X compact, T continue par morceaux sur un nombre fini de morceaux $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ et g un potentiel continu, l'opérateur de transfert associé à (X, T, g) est défini comme suit :

Définition C.1 : Opérateur de transfert

$$Lf(x) = \sum_{y \in T^{-1}x} g(y)f(y) = \sum_{P \in \mathcal{P}} (fg) \circ T_P^{-1}(x)\mathbf{1}_{TP}(x)$$

Une mesure conforme est une mesure ν qui se comporte bien par rapport à la dynamique :

Définition C.2 *ν est conforme si elle vérifie l'une des définitions suivantes qui sont équivalentes*

- $\exists \lambda > 0, \forall f \in L^1_\nu \ : \ \nu(Lf) = \lambda\nu(f)$
- $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \ : \ \left(\frac{d\nu \circ T}{d\nu}\right)_{|P_i} = \frac{\lambda}{g_{|P_i}}$

Reprenons l'exemple $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ continue et surjective par morceaux sur un nombre fini de morceaux $P_1, \ldots, P_n$ et remplaçons le potentiel $\log \frac{1}{|T'|}$ par un potentiel général continu, strictement positif g. Dans ce cadre, l'existence d'une mesure conforme pour le potentiel g se démontre de le façon suivante.
Soit f continue sur $[0, 1]$, comme T est surjective sur chaque morceau,

$$Lf = \sum_{i=1}^{n} f \circ T_{P_i}^{-1} \frac{1}{|T'| \circ T_{P_i}^{-1}} \mathbf{1}_{T(P_i)}$$

est continu. On peut donc définir le dual L^* de L qui agit sur le dual des fonctions continues $C([0, 1])^*$ de le manière suivante :

$$\forall m \in C([0, 1])^*, \forall f \in C([0, 1]), L^*m(f) = m(Lf)$$

Comme g est strictement positive, pour tout $m \in C([0, 1])^*$: $Lm(\mathbf{1}) > 0$ et on peut renormaliser l'opérateur comme suit :

$$\mathcal{L}m = \frac{1}{L^*m(\mathbf{1})} L^*m$$

Définissons alors :

$$\mathcal{C} = \{m \in C([0, 1])^*, m(\mathbf{1}) = 1, \text{ et } m(f) \geqslant 0 \text{ si } f \geqslant 0\}$$

$\mathcal{C}$ est exactement l'ensemble des mesures de probabilité sur $[0,1]$, d'après le théorème de représentation de Riesz. Il est aisé de vérifier que $\mathcal{L}$ agit sur $\mathcal{C}$ et est continu pour la topologie faible*. $C([0,1])^*$ est un espace localement convexe et sa boule unité B est *faiblement compacte d'après le théorème de Banach Alaoglu. De plus, $\mathcal{C}$ est clairement un sous espace fermé de B, donc $\mathcal{C}$ est *faiblement compact. Le théorème de Schauder-Tychonoff s'applique dans ce cadre : il existe $\nu \in \mathcal{C}$ qui est un point fixe de $\mathcal{L}$.

$$\forall f \in C([0,1]) \quad \nu(Lf) = \lambda\nu(f)$$

avec $\lambda = \nu(L\mathbf{1})$.
ν est une mesure de probabilité conforme.

D Récurrences

Considérons une transformation T sur un espace X, μ une mesure invariante par T et un ensemble P indépendant de son passé, c'est-à-dire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mu(P \cap T^{-k}P) = \mu(P)\mu(T^{-k}P) = \mu(P)^2$$

Notons $\tau_P(x)$ le temps d'entrée de x dans P :

$$\tau_P(x) = \inf\{k > 0, T^k(x) \in P\}$$

La probabilité de ne pas être entré dans l'ensemble P avant le temps n est égale à :

$$\begin{aligned} \mu\{x, \tau_P(x) > n\} &= \mu(P^c \cap T^{-1}P^c \cap \ldots \cap T^{-n+1}P^c) \\ &= \mu(P^c)^n \\ &= (1-\mu(P))^n \end{aligned}$$

Mais plus l'ensemble considéré sera petit, plus cette probabilité sera grande, il faut donc renormaliser le temps de retour pour espérer obtenir une loi limite. Renormalisons par la mesure de l'ensemble, $n = \frac{t}{\mu(P)}$, on fera alors tendre la mesure de l'ensemble P vers zéro :

$$\begin{aligned} \lim_{\mu(P)\to 0} \mu\left\{x, \tau_P(x) > \frac{t}{\mu(P)}\right\} &= \lim_{\mu(P)\to 0} (1-\mu(P))^{\frac{t}{\mu(P)}} \\ &= \lim_{\mu(P)\to 0} \exp\left(t\frac{\log(1-\mu(P))}{\mu(P)}\right) \\ &= \exp(-t) \end{aligned}$$

Ceci signifie que lorsqu'on renormalise le temps de retour τ_P par la mesure de l'ensemble $\mu(P)$, on obtient une convergence en loi vers une loi exponentielle. Il est naturel de regarder si ce résultat, vrai pour un évènement indépendant de son passé, reste vrai pour des systèmes mélangeants, pour lesquels ces évènements sont asymptotiquement indépendants.
La loi du temps d'entrée dans un ensemble P (cylindre ou voisinage plus général) tend vers la loi exponentielle pour de nombreux systèmes mélangeants : applications dilatantes de l'intervalle [CG2], applications de l'intervalle à point fixe neutre [CG1], sous shift de type fini [Pi], difféomorphismes Axiom A [Hi] ; avec un contrôle de l'erreur dans l'approximation, systèmes symboliques φ-mélangeant [GS], applications rationnelles de la sphère de Riemann [H]. L'article de M. Hirata, B. Saussol, S. Vaienti [HSV] développe une méthode qui regroupe la plupart de ces cas avec des estimations explicites de l'erreur dans l'approximation, estimations cruciales pour la suite.
Si maintenant on considère une transformation $T : X \longrightarrow X$ inversible par morceaux sur une partition $\mathcal{P}$ et μ une mesure invariante par T qui ne charge pas les bords de la partition. Rappelons la notation $\mathcal{P}_n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{P}$. Pour μ presque tout x, il existe un unique élément de $\mathcal{P}_n$ contenant x : on le note $\mathcal{P}_n(x)$. Le temps de retour dans $\mathcal{P}_n$ est défini comme suit :

$$R_n(x) = \inf\{k \geqslant 1, T^k(x) \in \mathcal{P}_n(x)\}$$

En 1989, Wyner et Ziv [WZ] ont prouvé que pour des systèmes ergodiques :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log R_n = h$$

où la convergence a lieu en probabilité et h est l'entropie du système. En 1993, Ornstein et Weiss [OW] ont montré que cette convergence est presque sure. Il est alors naturel de se poser la question des fluctuations dans cette convergence. Pour des systèmes symboliques dont la mesure invariante est une mesure de Gibbs, les fluctuations sont lognormales [CGS], c'est-à-dire que :

$$\frac{\log R_n - nh}{\sigma\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

où $\Longrightarrow$ désigne une convergence en loi, $\mathcal{N}(0,1)$ une loi normale centrée réduite et σ dépend de la vitesse de décroissance des corrélations du système.

E Présentation des résultats

Nous nous intéressons ici à des systèmes pondérés (i.e. munis d'un potentiel) inversibles par morceaux (avec un nombre fini de morceaux) et dont le comportement des discontinuités est raisonnable (ceci se traduit par l'hypothèse sur les pressions topologiques).
Dans le premier chapitre, nous montrons l'existence d'une mesure conforme sous l'hypothèse importante : la pression topologique du bord de la partition est strictement plus petite que la pression topologique du système. L'esprit de la démonstration est le même que celui qui est présenté au paragraphe C de l'introduction, on cherche un point fixe pour le dual de l'opérateur de transfert, nous montrons le

Théorème 1 *Soit* $(X, \mathcal{P}, T)$ *un système dynamique inversible par morceaux avec un potentiel* $g = exp(\varphi)$.
Soit $Y = \cup_{P\in\mathcal{P}} P$.
Supposons que :

(a) $P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}, T) < P_{\text{top}}(X, T)$.

(b) *g est à distorsion bornée au sens suivant :*

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \max_{P\in\mathcal{P}_{n+m}} \sup_{x,y\in P} \frac{g_n(x)}{g_n(y)} = 1.$$

(c) *$\mathcal{P}$ est génératrice, c'est-à-dire,* $\lim_{n\to\infty} \sup_{P\in\mathcal{P}_n} \operatorname{diam}(P) = 0$.

(d) $T(Y) \supset Y$ *et* $\inf_Y g > 0$.

(e) *Tout* $P \in \mathcal{P}_n$, $n \geqslant 1$, *a un nombre fini de composantes connexes.*

(f) *Pour tout ouvert non vide* $U \subset X$, *il existe* $n < \infty$ *tel que* $T^n(U \setminus \partial\mathcal{P}_n) \supset Y$.

Alors il existe une mesure conforme ν *pour* $(X, \mathcal{P}, T, g)$.
De plus, la valeur propre associée est $\lambda = \exp(P_{\text{top}}(X, T))$.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse aux mesures invariantes par T absolument continues par rapport à la mesure conforme ν. Une densité invariante h est trouvée comme valeur propre de l'opérateur de transfert dont on montre qu'il a la propriété du trou spectral sur un ensemble V_θ de fonctions à variation bornée en un certain sens. On obtient alors la décroissance exponentielle des corrélations. Soit $g_n(x) = g(x) \ldots g(T^{n-1}x)$ et

$$S(q) = \sum_n \theta^n \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_n \\ \bar{P}\cap\partial T^q\mathcal{P}_q\neq\emptyset}} \sup_P g_n$$

Théorème 2 *Soit* $(X, \mathcal{P}, T)$ *un système dynamique inversible par morceaux avec un potentiel* $g = exp(\varphi)$.
Sous les hypothèses (a), (c), (d), (e), (f) et :

(b') *g est à distorsion bornée au sens suivant :*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \max_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_{x,y\in P} \left| \frac{g(y)}{g(x)} - 1 \right| < 0$$

(g)

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \log S(q) < \log(\theta\, exp(P_{\text{top}}(X,T)))$$

il existe une unique densité invariante $h \in V_\theta$ strictement positive telle que $\nu(h) = 1$. $\mu = h\nu$ est un état d'équilibre et il existe $\xi < 1$ et $C > 0$ tels que, pour toutes fonctions $f_1 \in V_\theta$ et $f_2 \in L^1_\nu$:

$$\left| \int f_1 f_2 \circ T^n \, d\mu - \int f_1 \, d\mu \int f_2 \, d\mu \right| \leqslant C\xi^n \|f_1\|_\theta \|f_2\|_\nu$$

Il est à noter que parallèlement, l'existence d'états d'équilibre pour de tels systèmes et l'étude de la vitesse de décroissance des corrélations a été menée par J. Buzzi et Véronique Maume-Deschamps [BM] en utilisant la construction de tours inspirée par L. S. Young [Y]. Toutefois, une hypothèse supplémentaire de transversalité est nécessaire et la décroissance des corrélations est obtenue (en utilisant les métriques projectives) pour des observables régulières, ne permettant pas d'obtenir directement l'α-mélange.
Dans le dernier chapitre sont prouvées les propriétés de récurrence : la loi du temps d'entrée dans un cylindre tend vers une loi exponentielle et ceci permet de montrer que les fluctuations des temps de retour dans $\mathcal{P}_n$ autour de l'entropie sont lognormales :

Théorème 3 *Soit $(X, \mathcal{P}, T)$ un système dynamique inversible par morceaux avec un potentiel $g = exp(\varphi)$.*
Sous les hypothèses (b'), (c), (d), (e), (f) et :
(a')

$$\begin{aligned} P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}, T) &< P_{\text{top}}(X,T) \\ \sup(\varphi) &< P_{\text{top}}(X,T) \end{aligned}$$

Alors :

- *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que, pour tout $n > N_\varepsilon$ il existe $H_{n,\varepsilon} \subset \mathcal{P}_n$ avec :*

  $$\mu\left(\bigcup_{P\in H_{n,\varepsilon}} P \right) > 1 - K\varepsilon$$

  Il existe deux constantes strictement positives β et K telles que, pour tout n-cylindre P$\in H_{n,\varepsilon}$:

  $$\sup_{t>0} \left| \mu\left\{ \tau_P > \frac{t}{\mu(P)} \right\} - e^{-t} \right| \leqslant K e^{-\beta n} \ .$$

- *Si* $\sigma(\varphi) \neq 0$ *(où* $\sigma(\varphi)$ *est une quantité qui dépend de la vitesse d'auto-corrélation du système),* $\left(\frac{\log R_n - nh}{\sigma(\varphi)\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires bien définies sur l'espace de probabilité* $([0,1],\mathcal{B},\mu)$ *et :*

$$\frac{\log R_n - nh}{\sigma(\varphi)\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

où $\Rightarrow$ *est une convergence en loi.*
(et $\sigma(\varphi) = 0$ *si et seulement si il existe une fonction mesurable* $\bar{\varphi}$ *telle que* $\varphi = \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \circ T$*).*

Chapitre I
Mesure Conforme

I.1 Introduction, définitions

Dans ce premier chapitre issu de l'article écrit avec Jérôme Buzzi et Bernard Schmitt "Conformal measures for multidimensional piecewise invertible maps" [BPS] , nous montrons l'existence d'une mesure conforme ν pour des applications inversibles par morceaux associées à un potentiel régulier. Cette mesure sera alors la mesure de référence pour l'étude des états d'équilibre.
Dans un premier temps, nous déduisons d'un théorème de point fixe dans un espace fonctionnel, l'existence d'une forme linéaire propre Λ pour l'opérateur de transfert, associée à une valeur propre λ.
Dans un second temps, en combinant un argument assez subtil utilisé par Ledrappier [Le] et la notion de pistage définie dans [Bu1], nous montrons qu'il est possible d'identifier cette valeur propre λ à $\exp(P_{\text{top}}(X))$.
Ce résultat permet de monter que, en nommant ν la mesure qui coincide avec Λ sur les fonctions continues, ν ne charge pas l'image des discontinuités par la transformation, et en conséquence, que ν est conforme.

Pour commencer, définissons de manière précise ce que nous entendons par système dynamique inversible par morceaux.

Définition 1 *Un système dynamique inversible par morceaux est un triplet* $(X, \mathcal{P}, T)$ *avec :*
- X *est un sous ensemble compact de* $\mathbb{R}^d$.
- $\mathcal{P}$ *est une collection finie d'ouverts de* $\mathbb{R}^d$ *disjoints deux à deux tels que* $Y := \bigcup_{P\in\mathcal{P}} P$ *est dense dans* X.

– *$T : Y \to X$ tel que, pout tout $P \in \mathcal{P}$, $T_{|P}$ est la restriction d'un homéomorphisme T_P entre des voisinages de $\overline{P}$ et $\overline{TP}$.*

Un potentiel (ou poids) pour le système $(X, \mathcal{P}, T)$ est une fonction continue $g : Y \to]0, \infty[$.
Un potentiel étant strictement positif, on écrira parfois $g = \exp(\varphi)$, avec $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ continue.
On écrira $g_n(x) = g(x) \cdot g(Tx) \dots g(T^{n-1}x)$ où cette fonction est bien définie, c'est-à-dire sur $\cap_{k=0}^{n-1} T^{-k} Y$. Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des n-cylindres associés à la partition $\mathcal{P}$, c'est-à-dire, pour $n \geqslant 1$:

$$\mathcal{P}_n = \{P_0 \cap T^{-1}P_1 \cap \dots \cap T^{-(n-1)}P_{n-1} \neq \emptyset : P_0 \dots P_{n-1} \in \mathcal{P}\}.$$

Le n-cylindre $P_0 \cap T^{-1}P_1 \cap \dots \cap T^{n-1}P_{n-1}$ sera parfois noté $[P_0 \dots P_{n-1}]$.
∂P désigne le bord de P en tant que sous ensemble de $\mathbb{R}^d$: $\partial \mathrm{P} = \overline{\mathrm{P}} \backslash \mathring{\mathrm{P}}$. On utilisera la notation suivante :

$$\partial \mathcal{P}_n = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_n} \partial P.$$

La pression topologique de $S \subset X$ par rapport au potentiel g est :

$$P_{\mathrm{top}}(S, T) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_n \\ \bar{P} \cap S \neq \emptyset}} \sup_P g_n.$$

Une mesure conforme est une mesure de probabilité ν sur X telle qu'il existe $\lambda > 0$ avec :

$$\nu(TA) = \lambda \int_A \frac{1}{g} \, d\nu$$

pour tout mesurable A sur lequel T est injective. Demander à ν d'être une fonction propre de $\mathcal{L}^*$ pour une valeur propre positive (voir section 2 pour les définitions) va impliquer la conformalité de ν. En fait, sous la condition $\nu(\partial \mathcal{P}) = 0$, nous allons obtenir l'équivalence entre les deux propriétés suivantes : (ν est fonction propre de $\mathcal{L}^*$ pour une valeur propre positive) et (ν est conforme).

Théorème 1 *Soit $(X, \mathcal{P}, T)$ un système dynamique inversible par morceaux avec un potentiel g. Supposons que :*

(a) $P_{\mathrm{top}}(\partial \mathcal{P}, T) < P_{\mathrm{top}}(X, T)$.

(b) *g est à distorsion bornée au sens suivant :*

$$\lim_{m \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \max_{P \in \mathcal{P}_{n+m}} \sup_{x, y \in P} \frac{g_n(x)}{g_n(y)} = 1.$$

(c) *$\mathcal{P}$ est génératrice, c'est-à-dire,* $\lim_{n \to \infty} \sup_{P \in \mathcal{P}_n} \operatorname{diam}(P) = 0$.

(d) *$T(Y) \supset Y$ et $\inf_Y g > 0$.*

(e) *Tout $P \in \mathcal{P}_n$, $n \geqslant 1$, a un nombre fini de composantes connexes.*

(f) *Pour tout ouvert non vide $U \subset X$, il existe $n < \infty$ tel que $T^n(U \setminus \partial\mathcal{P}_n) \supset Y$.*

Alors il existe une mesure conforme ν pour $(X, \mathcal{P}, T, g)$.
De plus, la valeur propre associée est $\lambda = \exp(P_{\text{top}}(X, T))$.

I.2 Construction d'une fonction propre positive.

Soit $(X, \mathcal{P}, T, g)$ vérifiant les hypothèses du théorème 1. Rappelons la définition de l'opérateur de transfert associé à (T, g). C'est l'application L qui agit sur les fonctions de la manière suivante :

$$(Lf)(x) = \sum_{y \in T^{-1}x} g(y) \cdot f(y)$$

ce qui peut encore être écrit :

$$Lf = \sum_{P \in \mathcal{P}} (gf) \circ T_P^{-1} \cdot \mathbf{1}_{TP}.$$

Remarque 1 *Dans cette définition, nous définissons implicitement $Lf(x) = 0$ si $x \in X \setminus T(Y)$. La définition de L est indépendante des valeurs de g sur le bord $\partial\mathcal{P}$.*

Sous la condition (b) du théorème 1, $\sup_Y g < \infty$ si bien que $\sup_X L\mathbf{1}_X < \infty$. L agit sur l'espace de Banach $\mathcal{B}$ des fonctions mesurables bornées. Soit $\mathcal{B}'$ le dual topologique de $\mathcal{B}$ et L^* l'opérateur dual de L, c'est-à dire.

$$L^*\alpha(f) = \alpha(Lf)$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{B}'$ et $f \in \mathcal{B}$.

Remarquons qu'une mesure de probabilité α appartient à $\mathcal{B}'$ et rappelons que, sous la condition $\alpha(\partial\mathcal{P}) = 0$, être conforme est équivalent à être une fonctionnelle propre pour L^* pour une certaine valeur propre positive. D'une part, la preuve de l'implication ($L^*\alpha = \lambda\alpha \Longrightarrow \alpha$ est conforme) est donnée après le lemme 2. D'autre part, si α est conforme et $\alpha(\partial\mathcal{P}) = 0$ alors il est facile de voir que $\alpha(Lf) = \lambda\alpha(f)$ pour $f = \mathbf{1}_A$ et $A \subset P$. On déduit l'identité fonctionnelle pour toute fonction continue en utilisant l'approximation L^1_α d'une fonction continue par des fonctions en escalier $\sum_{P \in \mathcal{P}} g_P \mathbf{1}_P$.
C'est pourquoi un premier pas vers la preuve du théorème principal est :

Proposition 1 *Il existe une fonctionnelle positive* $\Lambda \in \mathcal{B}'$ *avec* $\Lambda(\mathbf{1}_X) = \Lambda(\mathbf{1}_Y) = 1$ *telle que*

$$L^*\Lambda = \lambda\Lambda$$

pour un nombre $0 < \lambda < \infty$.

Remarque 2 *Une telle fonctionnelle* Λ *ne charge pas les bords :* $L^n \mathbf{1}_{\partial\mathcal{P}_n} = 0$ *et*

$$\Lambda(\mathbf{1}_{\partial\mathcal{P}_n}) = \frac{1}{\lambda^n}\Lambda(L^n\mathbf{1}_{\partial\mathcal{P}_n}) = 0.$$

Remarque 3 *Une telle fonctionnelle* Λ *a un support plein, c'est-à-dire*

$$\Lambda(\mathbf{1}_U) > 0$$

pour tout ouvert non vide $U \subset X$. *C'est une conséquence immédiate des conditions (d) et (f). En effet, soient* U *un ouvert non vide et* n *tel que* $T^n(U\backslash\partial\mathcal{P}_n) \supset Y$ *alors :*

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{1}_U) &= \Lambda(\mathbf{1}_{U\backslash\partial\mathcal{P}_n}) = \frac{1}{\lambda^n}\Lambda(L^n\mathbf{1}_{U\backslash\partial\mathcal{P}_n}) \\ &\geqslant \frac{1}{\lambda^n}(\inf_Y L^n\mathbf{1}_{U\backslash\partial\mathcal{P}_n})\Lambda(\mathbf{1}_Y) \geqslant \frac{(\inf_Y g)^n}{\lambda^n} > 0. \end{aligned}$$

Puisque nous cherchons une mesure de probabilité, nous allons restreindre l'action de L^* au sous ensemble suivant $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}'$:

$$\mathcal{C} = \{\alpha \in \mathcal{B}',\ \alpha(\mathbf{1}_X) = \alpha(\mathbf{1}_Y) = 1 \text{ et } \alpha(f) \geqslant 0 \text{ pour tout } f \geqslant 0\}.$$

Considérons la topologie faible* sur $\mathcal{B}'$ et son sous ensemble $\mathcal{C}$.

L'opérateur normalisé $\mathcal{N} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est défini par :

$$\mathcal{N}\alpha = \frac{1}{L^*\alpha(\mathbf{1}_Y)}L^*\alpha \qquad \text{pour tout } \alpha \in \mathcal{C}.$$

Ainsi, nous devons chercher des points fixes pour $\mathcal{N} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Pour cela, nous allons appliquer le théorème de Schauder-Tychonoff [DS, V.10.5]. Pour commencer remarquons que $\mathcal{C}$ est un sous ensemble convexe de l'espace vectoriel topologique $\mathcal{B}'$, qui est localement convexe. De plus $\mathcal{C}$ est non vide puisqu'il contient par exemple δ_x ($\delta_x(f) = f(x)$, $x \in Y$ donné). Ainsi, il reste à vérifier les hypothèses suivantes :

1. $\mathcal{N} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *est bien défini.*
2. $\mathcal{C}$ *est compact.*
3. $\mathcal{N} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *est continu.*

Condition 1 : $\mathcal{N} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est bien défini.

Pour vérifier cette condition, prenons $\alpha \in \mathcal{C}$.
Premièrement, $\mathcal{N}(\alpha) = (L^*\alpha(1_Y))^{-1}L^*\alpha$ est bien défini en tant qu'élément de $\mathcal{B}'$. En effet, $L^*\alpha \in \mathcal{B}'$ par construction et $L^*\alpha(1_Y) > 0$; en utilisant que $\alpha(1_Y) = 1$ et la positivité de α :

$$\alpha(L\mathbf{1}_Y) \geqslant (\inf_Y L\mathbf{1}_Y)\alpha(\mathbf{1}_Y) = \inf_Y L\mathbf{1}_Y > 0$$

d'après la condition (d) du théorème 1.

Deuxièmement, $\mathcal{N}\alpha$ est positif, $(\mathcal{N}\alpha)(1_Y) = 1$ par construction et

$$\mathcal{N}\alpha(\mathbf{1}_X) = \frac{1}{\alpha(L\mathbf{1}_Y)}\alpha(L\mathbf{1}_X) = \frac{\alpha(L\mathbf{1}_{X\setminus Y}) + \alpha(L\mathbf{1}_Y)}{\alpha(L\mathbf{1}_Y)} = \frac{\alpha(L\mathbf{1}_Y)}{\alpha(L\mathbf{1}_Y)} = 1$$

comme $L1_{X\setminus Y} = 0$ (seuls les points de Y ont une image).

Ainsi, la condition 1 est satisfaite

Rappelons le
Théorème*(Banach-Alaoglu [DS, V.4.2]) : La boule unité du dual de tout espace vectoriel normé est *faiblement compacte.*

Ainsi, $B_1 = \{\alpha \in \mathcal{B}' : \|\alpha\| \leq 1\}$, la boule unité de $\mathcal{B}'$, est compacte et il est suffisant de vérifier que $\mathcal{C}$ est un sous espace fermé de B_1 pour établir

Condition 2 : $\mathcal{C}$ est compact.

Pour le vérifier, soit $\alpha \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{B}$ avec $\sup_X |f| \leq 1$:

$$0 \leqslant \sup_X |f| - f \leqslant 1 - f$$

si bien que $\alpha(1-f) \geqslant 0$ et puisque $\alpha(1-f) = 1 - \alpha(f)$, $\alpha(f) \leqslant 1$. De même : $-\alpha(f) \leqslant 1$. C'est pourquoi $\alpha \in B_1$ et on a montré $\mathcal{C} \subset B_1$.

Rappelons que pour tout $f \in \mathcal{B}$, $\alpha \mapsto \alpha(f)$ est continu d'après la définition de la topologie faible*. C'est pourquoi $\mathcal{C}$, qui est défini par une série d'inégalités du type $\alpha(f) \leq C$, est fermé et donc compact.

Condition 3 : $\mathcal{N} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est continu.

Rappelons qu'une base de $\mathcal{B}'$pour la topologie faible* est donnée par les ensembles :

$$V(\alpha_0, \varepsilon, f_1, \ldots, f_n) := \{\alpha \in \mathcal{B}' : \forall i = 1, \ldots, n \; |\alpha(f_i) - \alpha_0(f_i)| < \varepsilon\}$$

avec $\alpha_0 \in \mathcal{B}'$, $\varepsilon > 0$, $n = 1, 2, \dots$ and $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{B}$. Par consq́uent, pour établir la condition 3, c'est-à-dire la continuité, on doit trouver, pour tout $V(\mathcal{N}\alpha_0, \varepsilon, f_1, \dots, f_n)$, un nombre $\eta > 0$ et $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{B}$ tels que :

$$\mathcal{N}V(\alpha_0, \eta, g_1, \dots, g_m) \subset V(\mathcal{N}\alpha_0, \varepsilon, f_1, \dots, f_n).$$

Montrons que l'on peut prendre $m = n + 1$ et :

$$\begin{array}{l} \eta = \varepsilon \left(\frac{(\inf_Y L1_Y)^2}{\inf_Y L1_Y + (\sup_X L1_Y) \max_{1 \leq i \leq n} \sup_X |f_i|} \right) \\ g_1 = Lf_1, \dots, g_n = Lf_n, \qquad g_{n+1} = L1_Y. \end{array}$$

Remarquons que pour tout $j = 1, \dots, n+1$, $g_j \in \mathcal{B}$.

Supposons $\alpha \in V(\alpha_0, \varepsilon, g_1, \dots, g_{n+1})$. Par définition, on a pour tout $j = 1, \dots, n+1$:

$$|\alpha(g_j) - \alpha_0(g_j)| \leqslant \eta.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}\alpha(f_i) - \mathcal{N}\alpha_0(f_i)| &\leqslant |\frac{1}{L^*\alpha(\mathbf{1}_Y)} L^*\alpha(f_i) - \frac{1}{L^*\alpha(\mathbf{1}_Y)} L^*\alpha_0(f_i)| \\ &\quad + \left| \frac{1}{L^*\alpha(\mathbf{1}_Y)} - \frac{1}{L^*\alpha_0(\mathbf{1}_Y)} \right| |L^*\alpha_0(f_i)| \\ &\leqslant \frac{1}{\inf_Y L\mathbf{1}_Y} |\alpha(Lf_i) - \alpha_0(Lf_i)| \\ &\quad + \frac{1}{(\inf_Y L\mathbf{1}_Y)^2} |\alpha(L\mathbf{1}_Y) - \alpha_0(L\mathbf{1}_Y)| |\alpha_0(Lf_i)| \\ &\leqslant \frac{\eta}{\inf_Y L\mathbf{1}_Y} + \frac{\eta}{(\inf_Y L\mathbf{1}_Y)^2} |\alpha_0(Lf_i)|. \end{aligned}$$

De plus,

$$|\alpha_0(Lf_i)| \leqslant \sup_X |Lf_i| \leqslant \sup_X |L\mathbf{1}_X| \sup_X |f_i|$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}\alpha(f_i) - \mathcal{N}\alpha_0(f_i)| &\leqslant \frac{\eta}{\inf_Y L1_Y} + \frac{\eta \sup_x L1_Y \max_{i \in I} \sup_X |f_i|}{(\inf_Y L1_Y)^2} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci prouve la condition 3.

On peut maintenant appliquer le théorème de Schauder-Tychonoff : il existe $\Lambda \in \mathcal{C}$ telle que $\mathcal{N}(\Lambda) = \Lambda$, c'est-à-dire :

$$L^*\Lambda = \lambda\Lambda$$

avec $\lambda = \Lambda(L\mathbf{1}_Y) \in]0, \infty[$. Cela conclut la preuve de la proposition 1.

I.3 Calcul de la valeur propre positive.

Avant de prouver que la fonctionnelle Λ obtenue dans la section précédente est effectivement une mesure, on doit démontrer la proposition suivante :

Proposition 2 *Soit Λ une fonctionnelle propre pour L^*. Supposons que Λ est positive, satisfait $\Lambda(1) = 1$ et $\Lambda(\mathbf{1}_U) > 0$ pour tout ouvert non vide U. Alors la valeur propre associée à Λ est $\lambda = \exp P_{\text{top}}(X, T)$.*

L'inégalité $\lambda \leq \exp P_{\text{top}}(X, T)$ vient directement de la conformalité de Λ et de la définition de la pression puisque :

$$1 = \Lambda(\mathbf{1}_X) = \lambda^{-n}\Lambda(L^n \mathbf{1}_X) \leq \lambda^{-n} \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \Lambda(\mathbf{1}_{T^n P}) \sup_P g_n \leq \lambda^{-n} \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \sup_P g_n.$$

La preuve de l'inégalité inverse est plus délicate et repose fortement sur la condition $P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}, T) < P_{\text{top}}(X, T)$. On procède comme dans la preuve de la Proposition E dans [Bu2], mais ici Λ n'est pas une mesure, on doit donc vérifier la propriété de mesurabilité (qui va découler du lemme suivant) "à la main".

Rappelons que la pression mesurée de μ est :

$$P_g(\mu, T) = h_\mu(T) + \int_X \log g \, d\mu.$$

On a le principe variationnel, c'est-à-dire, la pression topologique est le supremum des pressions mesurées : cela provient du paragraphe 3.2 de [Bu2] en utilisant $P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}, T) < P_{\text{top}}(X, T)$ et que $\mathcal{P}$ est génératrice. Il est facile de le voir en identifiant la dynamique symbolique avec (X, T), on a alors le principe variationnel pour le système symbolique par un résultat classique (voir par exemple [DGS, chap.18].)

Pour conclure, on va montrer que les pressions mesurées sont bornées par $\log \lambda$, en utilisant l'approche de [Bu2] qui combine un résultat de Ledrappier [Le] et des estimées de "pistage".

Fixons une mesure de probabilité ergodique μ. On peut supposer que :

$$P_g(\mu, T) > P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}, T)$$

(en effet : $P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}, T) < P_{\text{top}}(X, T)$ et donc

$$\begin{aligned} P_{\text{top}}(X, T) &= \sup\{P_g(\mu, T),\ \mu \text{ invariante, ergodique}\} \\ &= \sup\{P_g(\mu, T),\ \mu \text{ invariante, ergodique}, P_g(\mu, T) > P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}, T)\}\ ) \end{aligned}$$

Soit $p : (\tilde{X}, \tilde{T}, \tilde{\mu}) \to (X, T, \mu)$ l'extension naturelle au sens suivant :

$$\tilde{X} = \{(\dots, x_{-k}, \dots, x_{-1}, x_0), Tx_{k-1} = x_k, x_k \in Y \quad \forall k \in \mathbb{Z}_-\}$$

On la réalise comme

$$\tilde{X} = \{\tilde{x} = (A, x) \in \mathcal{P}^{\mathbb{Z}_-} \times X : x \in \bigcap_{n \geqslant 0} T^n[A_{-n} \dots A_0]\}$$

avec la topologie induite par celle de $\mathcal{P}^{\mathbb{Z}_-} \times X$.

La dynamique est donnée par l'application (partiellement définie) :

$$\tilde{T} : (\dots A_{-1}A_0, x) \mapsto (\dots A_{-1}A_0B, Tx)$$

si B est l'élément de $\mathcal{P}$ qui contient Tx.

Soit ξ la partition finie $p^{-1}\mathcal{P}$. Soit η la partition mesurable $\bigvee_{n \geqslant 0} \tilde{T}^n \xi$, i.e., deux points sont dans le même élément de η si et seulement si ils ont le même passé par $\tilde{T}$. Il faut noter que : $\eta(\tilde{x}) = \{A\} \times W(\tilde{x})$ si

$$\tilde{x} = (A, x) \text{ et } W(\tilde{x}) := \bigcap_{n \geqslant 0} T^n[A_{-n} \dots A_0].$$

L'hypothèse (e) que tout cylindre a un nombre fini de composantes connexes est nécessaire pour montrer le lemme suivant :

Lemme 1 *Si $P_g(\mu, T) > P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}, T)$ alors il existe une partition dénombrable mesurable $\tilde{\mathcal{P}}$ de $\tilde{X}$ modulo $\tilde{\mu}$ telle que $W(\tilde{x})$ est constant et egal à un sous ensemble ouvert non vide sur chaque élément de $\tilde{\mathcal{P}}$.*

La preuve est basée sur la notion de pistage d'une mesure par un ensemble introduite dans[Bu1]. Voici un rappel de cette notion.

Une mesure $\tilde{\mu}$ sur $\tilde{X}$ est pistée par $S \subset X$ si pour tout $\varepsilon > 0$ et $\tilde{\mu}$-p.p. $\tilde{x} \in \tilde{X}$ il existe $n > \varepsilon^{-1}$ et $s \in S$ tels que :

$$d(T^k(p(\tilde{T}^{-n}\tilde{x})), T^k(s)) < \varepsilon \qquad \forall 0 \leq k \leq n.$$

c'est-à-dire, l'orbite est faite de débuts arbitrairement longs d'orbites commençant dans S.

La principale conséquence du pistage est que cela implique :
$P_g(\tilde{\mu}, \tilde{T}) \leq P_g(S, T)$[Bu2, Théorème S].

Preuve : (du lemme 1) D'après le lemme 3, $P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}) \geqslant P_{\text{top}}(\partial T\mathcal{P})$ et donc $P_g(\mu, T) > P_{\text{top}}(\partial T\mathcal{P})$. Par conséquent, μ n'est pas pistée par $\partial T\mathcal{P}$ d'après ce qui précède. Nous affirmons que cela implique que pour $\tilde{\mu}$-p.t. $(A,x)\in\tilde{X}$, il existe $N<\infty$ tel que, pour tout $n\geqslant 0$,

$$(\partial T^n[A_{-N-n}\dots A_{-N-1}])\cap[A_{-N}\dots A_0]=\emptyset.$$

D'après l'hypothèse (c), on peut trouver M tel que $\operatorname{diam}(\mathcal{P}_M)<\varepsilon$. Raisonnons par contraposée : contredire ce qui précède donne un ensemble $\tilde{V}\subset\tilde{X}$ de mesure positive et tel que pour p.p. $\tilde{x}\in\tilde{V}$, il existe une suite infinie $n_1<n_2<\dots$ telle que :

$$(\partial T^{n_{k+1}-n_k}[A_{-n_{k+1}}\dots A_{-n_k-1}])\cap[A_{-n_k}\dots A_0]\neq\emptyset.$$

Notons que si on peut trouver une suite avec cette propriété pour $\tilde{x}$, on peut en trouver une pour $\tilde{T}^{-1}\tilde{x}$ $(n_1-1<n_2-1<\dots)$; on peut donc choisir $\tilde{V}$ invariant par $\tilde{T}$ et, par ergodicité de $\tilde{\mu}$, de mesure totale.
On peut supposer n_{k+1} minimal pour un n_k donné. Alors on doit avoir $(\partial TA_{-n_{k+1}})\cap[A_{-n_{k+1}+1}\dots A_0]\neq\emptyset$. Ainsi l'itinéraire de $\tilde{T}^{-n_{k+1}+1}\tilde{x}$ est le même que celui d'un point de $\partial T\mathcal{P}$. En utilisant $\operatorname{diam}(\mathcal{P}^M)<\varepsilon$ et en shiftant par $\tilde{T}^{-M}$, on obtient que $\tilde{\mu}$ est pistée par $\partial T\mathcal{P}$, c'est une contradiction qui prouve l'affirmation.

Et l'affirmation implique que $T^{N+n}[A_{-N-n}\dots A_0]$, qui, par construction, est un sous ensemble de $T^N[A_{-N}\dots A_0]$, est en fait une union de composantes connexes de $T^N[A_{-N}\dots A_0]$. Par hypothèse (e) du théorème principal, il y a un nombre fini de telles composantes et donc, il existe $M<\infty$ tel que

$$W(A,x)=T^M[A_{-M}\dots A_0].$$

En particulier, $W(\cdot)$ est p.p. un sous ensemble ouvert non vide de X, et prend un nombre dénombrable de valeurs distinctes. Pour finir, notons que les ensembles où la valeur de W est fixée sont mesurables puisqu'ils sont de la forme :

$$\begin{aligned}&\{(B,x)\in\tilde{X}: B_{-M}\dots B_0=A_{-M}\dots A_0\}\\&\setminus\{(B,x)\in\tilde{X}:\forall m>M,\ B_{-m}\dots B_0\in\mathcal{A}\}\end{aligned}$$

où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des mots $B_{-m}\dots B_0$ qui définissent un W-ensemble plus petit que $B_{-M}\dots B_0$. ■

Nous allons comparer $\tilde{\mu}$ avec la fonction que nous allons essayer de définir sur les sous ensembles mesurables S de X par :

$$m(S):=\int_{\tilde{X}} m(\tilde{x},S)\,\tilde{\mu}(d\tilde{x})$$

où

$$m(\tilde{x},S):=\frac{\Lambda(\mathbf{1}_{W(\tilde{x})}\cdot\rho(\tilde{x},\cdot)\cdot\mathbf{1}_S)}{\Lambda(\mathbf{1}_{W(\tilde{x})}\cdot\rho(\tilde{x},\cdot))}$$

et $\rho(\tilde{x}, y) := \prod_{k \geqslant 1} \frac{g(T_{A_{-k}}^{-1} \circ \cdots \circ T_{A_{-1}}^{-1} y)}{g(\tilde{T}^{-k} \tilde{x})}$ si $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{x} = (A, x)$ et $y \in W(\tilde{x})$, avec la notation $g(A, x) := g(x)$.

On vérifie d'abord que m est bien définie, i.e., que $\tilde{x} \mapsto m(\tilde{x}, S)$ est mesurable. Observons que d'après l'hypothèse (b) du Théorème 1, ρ est uniformément continue sur son domaine de définition $\tilde{X} \times \cup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} W(\tilde{x})$. De plus, $\cup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} W(\tilde{x})$ est dense dans X, on peut donc étendre ρ en une fonction continue sur tout l'espace $\tilde{X} \times X$. Il est alors facile de vérifier que, si on se donne un sous ensemble mesurable W de X, ce qui suit est mesurable :

$$\tilde{x} \mapsto \Lambda(\mathbf{1}_W \cdot \rho(\tilde{x}, \cdot) \cdot \mathbf{1}_S).$$

Le lemme précédent permet alors d'écrire : $\mathbf{1}_{W(\tilde{x})} = \sum_{E \in \tilde{\mathcal{P}}} \mathbf{1}_E \mathbf{1}_{W(E)}$. La mesurabilité de $m(\cdot, S)$ suit. En particulier, $m(S)$ est bien définie.

On suit de près Ledrappier [Le] pour le reste de la preuve de la Proposition 3.1.

Soit
$$Q(\tilde{x}) = \Lambda(\mathbf{1}_{W(\tilde{x})} \cdot \rho(\tilde{x}, \cdot))$$
(Remarquons que la fonction à laquelle on applique Λ est en fait une fonction sur X, pas sur $\tilde{X}$). Une observation cruciale est que le lemme précédent implique :

$$0 < Q(\tilde{x}) < \infty \text{ pour } \tilde{\mu}\text{-p.t. } \tilde{x}.$$

En effet, $\rho(\tilde{x}, \cdot) > 0$ sur $W(\tilde{x})$ qui est un sous ensemble ouvert non vide et donc satisfait $\Lambda(\mathbf{1}_{W(\tilde{x})}) > 0$.

Soit $\mathcal{P}' = T^{-1}\mathcal{P}$. Calculons :

$$\begin{aligned}
m(\tilde{x}, \mathcal{P}'(x)) &= \frac{1}{Q(\tilde{x})} \cdot \Lambda(\mathbf{1}_{W(\tilde{x})} \cdot \rho(\tilde{x}, \cdot) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{P}'(x)}) \\
&= \frac{1}{Q(\tilde{x})} \lambda^{-1} \Lambda(L(\mathbf{1}_{W(\tilde{x})} \cdot \rho(\tilde{x}, \cdot) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{P}'(x)})) \\
&= \frac{1}{Q(\tilde{x})} \lambda^{-1} \Lambda(\mathbf{1}_{\mathcal{P}(Tx) \cap TW(\tilde{x})} \cdot \rho(\tilde{x}, T_{\mathcal{P}(x)}^{-1}(\cdot)) \cdot g \circ T_{\mathcal{P}(x)}^{-1}) \\
&= \frac{1}{Q(\tilde{x})} \lambda^{-1} \Lambda(\mathbf{1}_{W(\tilde{T}\tilde{x})} \cdot \rho(\tilde{T}\tilde{x}, \cdot) \cdot g(x)) \\
&= \lambda^{-1} \frac{Q(\tilde{T}\tilde{x})}{Q(\tilde{x})} g(x) \qquad (1)
\end{aligned}$$

en utilisant $\mathcal{P}(Tx) \cap TW(\tilde{x}) = W(\tilde{T}\tilde{x})$ et $\rho(\tilde{T}\tilde{x}, P) = \rho(\tilde{x}, y) \cdot \frac{g(y)}{g(x)}$ où $y = T_{\mathcal{P}(x)}^{-1}(P)$.

Nous affirmons que :

$$\int_{\tilde{X}} \log m(\tilde{x}, \mathcal{P}'(x))\, d\tilde{\mu}(\tilde{x}) = \int_{\tilde{X}} \log g\, d\tilde{\mu} - \log \lambda.$$

Remarquons que si $\log Q$ était intégrable, cette égalité serait une conséquence immédiate du calcul précédent (en fait, il suffirait que $\log Q \circ T - \log Q$ soit minorée par une fonction intégrable (lemme 4.1.13 [K3])). Mais on sait seulement que $\log Q$ est p.p. fini, donc on utilise un argument plus subtil de [Le].

Pour commencer, remarquons que comme $m(\tilde{x}, \mathcal{P}'(x)) \leq 1$,

$$\int_{\tilde{X}} \log m(\tilde{x}, \mathcal{P}'(x))\, d\tilde{\mu}(\tilde{x})$$

est bien défini dans $[-\infty, 0]$ et le théorème ergodique de Birkhoff implique :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log m(\tilde{T}^k \tilde{x}, \mathcal{P}'(T^k x)) \text{ existe p. p. et vaut } \int_{\tilde{X}} \log m(\tilde{x}, \mathcal{P}'(x))\, d\tilde{\mu}(\tilde{x}).$$

La convergence presque sure implique la convergence en probabilité. Et le calcul précédent montre que les sommes de Birkhoff sont égales à

$$\frac{1}{n}\Big(\log Q \circ \tilde{T}^n - \log Q\Big) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \log g(T^k x) - \log \lambda.$$

Comme $\log Q$ est fini presque partout, cette moyenne doit converger en probabilité vers $\int_{\tilde{X}} \log g\, d\tilde{\mu} - \log \lambda$. L'affirmation suit.

En rappelant que $\eta = \bigvee_{k\geqslant 0} \tilde{T}^k \xi$ et que ξ est génératrice, il est facile de voir que η est génératrice et que η est plus fine que $\tilde{T}\eta$, par conséquent l'entropie de μ peut être calculée comme suit :

$$\begin{aligned} h(\mu, T) &= h(\tilde{\mu}, \tilde{T}) = h(\tilde{\mu}, \tilde{T}^{-1}) = H_{\tilde{\mu}}(\eta | \bigvee_{k\geqslant 1} \tilde{T}^k \eta) = H_{\tilde{\mu}}(\tilde{T}^{-1}\eta | \bigvee_{k\geqslant 0} \tilde{T}^k \eta) \\ &= H_{\tilde{\mu}}(\tilde{T}^{-1}\eta | \eta) = H_{\tilde{\mu}}(\tilde{T}^{-1}\xi | \eta) \\ &= -\int_{\tilde{X}} \sum_{P' \in \tilde{T}^{-1}\xi} \mathbf{1}_{P'}(\tilde{x}) \log \mathbb{E}_{\tilde{\mu}}(\mathbf{1}_{P'} | \eta)\, d\tilde{\mu}(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P_g(\mu,T)-\log\lambda &= h(\tilde{\mu},\tilde{T})+\int_{\tilde{X}}\log g\,d\tilde{\mu}-\log\lambda\\
&= \int_{\tilde{X}}\sum_{P'\in\tilde{T}^{-1}\xi}\mathbf{1}_{P'}(\tilde{x})\log\frac{m(\tilde{x},pP')}{\mathbb{E}_{\tilde{\mu}}(\mathbf{1}_{P'}|\eta)}\,d\tilde{\mu}(\tilde{x})\\
&\leq \log\int_{\tilde{X}}\sum_{P'\in\tilde{T}^{-1}\xi}\mathbf{1}_{P'}(\tilde{x})\frac{m(\tilde{x},pP')}{\mathbb{E}_{\tilde{\mu}}(\mathbf{1}_{P'}|\eta)}\,d\tilde{\mu}(\tilde{x})\\
&= \log\int_{\tilde{X}}\mathbb{E}_{\tilde{\mu}}\left(\sum_{P'\in\tilde{T}^{-1}\xi}\mathbf{1}_{P'}(\tilde{x})\frac{m(\tilde{x},pP')}{\mathbb{E}_{\tilde{\mu}}(\mathbf{1}_{P'}|\eta)}\;\middle|\;\eta\right)\,d\tilde{\mu}(\tilde{x})\\
&= \log\int_{\tilde{X}}\sum_{P'\in\tilde{T}^{-1}\xi}\mathbb{E}_{\tilde{\mu}}(\mathbf{1}_{P'}|\eta)\frac{m(\tilde{x},pP')}{\mathbb{E}_{\tilde{\mu}}(\mathbf{1}_{P'}|\eta)}\,d\tilde{\mu}(\tilde{x})\\
&= \log\int_{\tilde{X}}\sum_{P'\in\mathcal{P}'}m(\tilde{x},P')\,d\tilde{\mu}(\tilde{x})\\
&= \log\int_{\tilde{X}}m(\tilde{x},1)\,d\tilde{\mu}(\tilde{x})=0
\end{aligned}$$

en utilisant la concavité du log et que $m(\cdot,pP')$ est η-mesurable : un calcul simple montre que $m(\tilde{x},S)=m(\tilde{y},S)$ if $\eta(\tilde{x})=\eta(\tilde{y})$.

Ceci conclut la preuve de la proposition (2.1).

I.4 Λ définit une mesure conforme.

Nous allons montrer que Λ définit une mesure conforme ce qui va conclure la preuve du théorème 1.

Soit $C_c(S)$ l'ensemble des fonctions continues dont le support est compact et inclus dans S. Bien sûr $C_c(X)=C(X)$, puisque X est compact.

Puisque $\Lambda_{|C(X)}$ est une forme linéaire positive sur $C(X)$, le théorème de représentation de Riesz implique qu'il existe ν, mesure Borélienne positive telle que :

$$\forall f\in C(X):\quad \Lambda(f)=\nu(f).$$

En particulier, $\nu(\mathbf{1}_X)=\Lambda(\mathbf{1}_X)=1$ si bien que ν est une mesure de probabilité.

Pour tout $f \in C(X)$, $\Lambda(Lf) = \lambda\Lambda(f) = \lambda\nu(f)$. Mais Lf n'est pas nécéssairement continue aux points de $\partial T\mathcal{P} := \bigcup_{P\in\mathcal{P}} \partial TP$, et donc il n'est pas clair que $\nu(Lf) = \Lambda(Lf)$.

Nous affirmons la chose suivante :

Lemme 2

$$\nu(\partial T\mathcal{P}) = 0.$$

Voyons comment cette affirmation implique la conformalité de ν. Fixons $f \in C(X)$, non negative. Montrons que $\nu(Lf) = \Lambda(Lf)$.

Puisque la probabilité ν est une mesure régulière (en tant que mesure Borélienne sur un ensemble compact), on a la propriété suivante :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe U_ε voisinage ouvert de $\partial T\mathcal{P}$, tel que $\nu(U_\varepsilon) < \varepsilon$.

Comme il est l'usage, on considère $f_\varepsilon \in C_c(X \setminus \partial T\mathcal{P})$ telle que :

$$\begin{cases} f_\varepsilon = f & in \;\; X \setminus U_\varepsilon \\ f_\varepsilon \leqslant f & in \;\; U_\varepsilon. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} |\nu(Lf) - \lambda\nu(f)| &= |\nu(Lf_\varepsilon) + \nu(L(f - f_\varepsilon)) - \lambda\nu(f)| \\ &\leqslant |\lambda\nu(f_\varepsilon) - \lambda\nu(f)| + 2\sup_X L\mathbf{1}_X \sup_X f \;\, \nu(U_\varepsilon) \\ &\leqslant 2\sup_X f(\sup_X L\mathbf{1}_X + \lambda)\nu(U_\varepsilon) \\ &\leqslant (2\sup_X f(\sup_X L\mathbf{1}_X + \lambda))\varepsilon. \end{aligned}$$

La conformalité de ν suit en utilisant l'approximation suivante : Soit A un borélien tel que $T : A \to TA$ est inversible et soit $\varepsilon > 0$. Puisque ν est régulière, il existe K_ε compact et O_ε ouvert tels que $K_\varepsilon \subset A \subset O_\epsilon$ et :

$$\nu(A) - \nu(K_\varepsilon) < \varepsilon$$

$$\nu(O_\varepsilon) - \nu(A) < \varepsilon$$

Considérons g_ε continue à support compact telle que :

$$\begin{cases} g_\varepsilon = 1/g & in \;\; K_\varepsilon \\ g_\varepsilon = 0 & in \;\; O_\varepsilon^c \\ g_\varepsilon \leqslant 1/g & in \;\; O \setminus K_\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\nu(L(\mathbf{1}_A \cdot 1/g)) \;\; &- \;\; \lambda\nu(\mathbf{1}_A \cdot 1/g)| \\ &\leqslant |\nu(L(\mathbf{1}_A \cdot 1/g)) - \nu(\mathcal{L}g_\varepsilon) + \lambda\nu(g_\varepsilon) - \lambda\nu(\mathbf{1}_A \cdot 1/g)| \\ &\leqslant |\nu(L(\mathbf{1}_A \cdot 1/g - g_\varepsilon))| + \lambda|\nu(g_\varepsilon - \mathbf{1}_A \cdot 1/g)| \\ &\leqslant 2\frac{\sup_X L\mathbf{1}_X}{\inf_X g}\nu(O_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) + 2\frac{\lambda}{\inf_X g}\nu(O_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) \\ &\leqslant 4\varepsilon\left(\frac{\sup_X \mathcal{L}\mathbf{1}_X + \lambda}{\inf_X g}\right) \end{aligned}$$

et :

$$\lambda \int_A \frac{1}{g}\, d\nu = \lambda\nu(\mathbf{1}_A \cdot 1/g) = \nu(\mathcal{L}(\mathbf{1}_A \cdot 1/g)) = \nu(TA).$$

Passons à la preuve du lemme (2) . On a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 3

$$P_{\text{top}}(\partial T\mathcal{P}, T) \leqslant P_{\text{top}}(\partial \mathcal{P}, T).$$

Lemme 4 *Pour tout borélien B :*

$$\nu(B) \leqslant \inf\{\Lambda(O),\ O \textit{ ouvert},\ O \supset B\}.$$

Preuve : (du lemme 3). Par définition :

$$P_{\text{top}}(\partial T\mathcal{P}, T) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\substack{B\in\mathcal{P}_n \\ \bar{B}\cap\partial T\mathcal{P}\neq\emptyset}} \sup_B g_n.$$

Soit $B \in \mathcal{P}_n$ tel que $\bar{B} \cap \partial T\mathcal{P} \neq \emptyset$, il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que $\overline{P \cap T_P^{-1}B} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset$. De plus, soit $x \in B$:

$$g_n(x) = \frac{g_{n+1}(T_P^{-1}(x))}{g(T_P^{-1}(x))} \leqslant \frac{1}{\inf g} \sup_{P\cap T_P^{-1}B} g_{n+1}.$$

Donc $\sup_B g_n \leqslant \frac{1}{\inf g} \sup_{B'} g_{n+1}$ avec $B' = P \cap T_P^{-1}B \in \mathcal{P}_{n+1}$. Rappelons que $\inf g > 0$ d'après l'hypothèse (d) du théorème principal. On en déduit :

$$\sum_{\substack{B\in\mathcal{P}_n \\ \bar{B}\cap\partial T\mathcal{P}\neq\emptyset}} \sup_B g_n \leqslant \frac{1}{\inf g} \sum_{\substack{B'\in\mathcal{P}_{n+1} \\ \bar{B}'\cap\partial\mathcal{P}\neq\emptyset}} \sup_{B'} g_{n+1}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \quad & \log \sum_{\substack{B\in\mathcal{P}_n \\ \bar{B}\cap\partial T\mathcal{P}\neq\emptyset}} \sup_B g_n \\ & \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{\inf g} + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \log \sum_{\substack{B'\in\mathcal{P}_{n+1} \\ \bar{B}'\cap\partial\mathcal{P}\neq\emptyset}} \sup_{B'} g_{n+1}. \end{aligned}$$

■

Preuve : (du lemme 4) Puisque ν est régulière :

$$\nu(B) = \inf\{\nu(O),\ O \text{ open},\ O \supset B\}.$$

Fixons un ouvert O et montrons que : $\nu(O) \leqslant \Lambda(O)$, cela prouvera le lemme. Prenons $\varepsilon > 0$. En utilisant encore la régularité de ν, il existe K_ε, sous ensemble compact de O, tel que :

$$\nu(O) < \nu(K_\epsilon) + \varepsilon.$$

Soit $g_\varepsilon : X \to [0,1]$ continue et telle que :

$$\begin{cases} g_\varepsilon = 1 & in \quad K_\varepsilon \\ g_\varepsilon = 0 & in \quad O^c \\ g_\varepsilon \leqslant 1 & in \quad O \setminus K_\varepsilon. \end{cases}$$

D'une part, $g_\varepsilon \leqslant \mathbf{1}_O$ si bien que

$$\nu(g_\varepsilon) = \Lambda(g_\varepsilon) \leqslant \Lambda(O) \text{ et } \sup_{\varepsilon>0} \nu(g_\varepsilon) \leqslant \Lambda(O).$$

D'autre part, $\nu(g_\varepsilon) \geqslant \nu(K_\varepsilon) > \nu(O) - \varepsilon$ si bien que :

$$\nu(O) < \nu(K_\varepsilon) + \varepsilon \leq \nu(g_\varepsilon) + \varepsilon$$

et $\nu(O) \leq \sup_{\varepsilon>0} \nu(g_\varepsilon) \leq \Lambda(O)$. ■

Preuve : (du lemme 2). L'affirmation sera déduite du lemme précédent si on peut trouver des voisinages O de $\partial T\mathcal{P}$ avec $\Lambda(O)$ arbitrairement petit.

Soit $\mathcal{A}_n$ l'ensemble $\{P \in \mathcal{P}_n, \bar{P} \cap \partial T\mathcal{P} \neq \emptyset\}$. En utilisant le fait que Λ est une fonctionnelle propre à valeur propre λ on a, pour tout $\delta > 0$, $N(\delta)$ tel que, pour tout $n > N(\delta)$:

$$\begin{aligned} \Lambda\left(\bigcup \mathcal{A}_n\right) \leqslant \frac{1}{\lambda^n} \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_n \\ \bar{P} \cap \partial T\mathcal{P} \neq \emptyset}} \sup g_n &\leqslant \left(\frac{\exp(P_{\text{top}}(\partial T\mathcal{P}, T) + \delta)}{\exp(P_{\text{top}}(X,T))}\right)^n \\ &\leqslant \left(\frac{\exp(P_{\text{top}}(\partial \mathcal{P}, T) + \delta)}{\exp(P_{\text{top}}(X,T))}\right)^n \end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient du lemme 3. Prenons $\delta = (P_{\text{top}}(X,T) - P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}, T))/2$, qui est positif par hypothèse (a) du théorème principal, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda\left(\bigcup \mathcal{A}_n\right) = 0 \tag{2}$$

Si $P \in \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{A}_n$, alors $\bar{P} \cap \partial T\mathcal{P} = \emptyset$, et puisque les deux ensembles sont compacts : $d(\bar{P}, \partial T\mathcal{P}) > 0$. Comme l'ensemble $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{A}_n$ est fini, $\inf_{P \in \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{A}_n} d(\bar{P}, \partial T\mathcal{P}) > 0$. Donc l'ensemble suivant est un voisinage de $\partial T\mathcal{P}$:

$$O_n = \{x \in X, d(x, \partial T\mathcal{P}) < \inf_{P \in \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{A}_n} d(\bar{P}, \partial T\mathcal{P})\}.$$

et il est inclus dans $\bigcup_{P\in\mathcal{A}_n}\bar{P}$.
A cause de la remarque 2, (Λ ne charge pas les bords de toutes les partitions itirées) $\Lambda(\bigcup_{P\in\mathcal{A}_n}\bar{P})=\Lambda(\bigcup\mathcal{A}_n)$; on déduit $\lim_{n\to\infty}\Lambda(O_n)=0$, et ceci conclut la preuve du lemme 2 et donc la preuve du théorème 1. ■

Chapitre II
Décroissance Des Corrélations

II.1 Introduction

Nous allons maintenant chercher les états d'équilibre pour des systèmes inversibles par morceaux parmi les mesures invariantes absolument continues par rapport à la mesure conforme dont on a montré l'existence dans le chapitre précédent. Le problème est donc de trouver une densité invariante. Classiquement, une telle densité est un vecteur propre pour l'opérateur de transfert. La question posée par les discontinuités du système et son caractère non markovien est la suivante : sur quel espace fonctionnel fair agir l'opérateur ?
Nous introduisons ici une définition de variation d'une fonction (inspirée de la définition utilisée par Xavier Bressaud [Bre]) qui dépend de la partition d'inversibilité de l'application, du potentiel et de la mesure conforme. Puis nous montrons que l'opérateur de transfert, qui est continu sur l'espace des fonctions dont la variation est finie, est quasicompact sur cet espace. Ceci permet, moyennant une hypothèse de mélange topologique, d'obtenir l'existence de la densité invariante et la décroissance exponentielle des corrélations pour des observables à variation bornée. (la notion de variation bornée et donc l'espace V_θ sont définis juste après l'énoncé du théorème)

Théorème 2 *Soit $(X, \mathcal{P}, T)$ un système dynamique inversible par morceaux avec un potentiel $g = exp(\varphi)$. Supposons que :*

(a) *$P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}, T) < P_{\text{top}}(X, T)$.*

(b') *g est à distorsion bornée au sens suivant :*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \max_{P\in\mathcal{P}^n} \sup_{x,y\in P} \left| \frac{g(y)}{g(x)} - 1 \right| < 0$$

(c) *$\mathcal{P}$ est génératrice, c'est-à-dire,* $\lim_{n\to\infty} \sup_{P\in\mathcal{P}_n} \operatorname{diam}(P) = 0$.

(d) $T(Y) \supset Y$ *et* $\inf_Y g > 0$.

(e) *Tout $P \in \mathcal{P}_n$, $n \geqslant 1$, a un nombre fini de composantes connexes.*

(f) *Pour tout ouvert non vide $U \subset X$, il existe $n < \infty$ tel que $T^n(U \setminus \partial\mathcal{P}_n) \supset Y$.*

(g)
$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \log S(q) < \log(\theta\, exp(P_{\text{top}}(X,T)))$$

Alors il existe une unique densité invariante $h \in V_\theta$ strictement positive telle que $\nu(h) = 1$. $\mu = h\nu$ est un état d'équilibre et il existe $\xi < 1$ et $C > 0$ tels que, pour toutes fonctions $f_1 \in V_\theta$ et $f_2 \in L^1_\nu$:

$$\left| \int f_1 f_2 \circ T^n \ d\mu - \int f_1 \ d\mu \int f_2 \ d\mu \right| \leqslant C\xi^n \|f_1\|_\theta \|f_2\|_\nu$$

II.2 L'espace fonctionnel V_θ

II.2.1 Définitions

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, le supremum et l'infimum essentiels de la fonction f sur un ensemble P sont définis comme suit :

$$\overline{\sup}_P f = \inf\{M, \nu(x \in P, f(x) > M) = 0\}$$
$$\overline{\inf}_P f = \sup\{M, \nu(x \in P, f(x) < M) = 0\}$$

Les observables seront des fonctions éléments de L^∞_ν, espace des classes de fonctions dont le supremum essentiel est fini. Deux représentants sont dans la même classe si ils sont égaux ν presque partout.
L^∞_ν, muni de la norme $\|f\|_\infty = \overline{\sup}_X |f|$, est un espace de Banach.
Nous noterons également L^1_ν l'espace des classes de fonctions dont l'intégrale (pour la mesure ν) de la valeur absolue est finie et L^1_ν, muni de la norme $\|f\|_\nu = \nu(|f|)$, est un espace de Banach.
L'oscillation essentielle d'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ sur un ensemble A est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{osc}}(f, A) &= \overline{\sup}_{x,y\in A} |f(y) - f(x)| \\ &= \inf\{M, \nu \times \nu((x, y) \in P \times P, |f(y) - f(x)| > M) = 0\} \end{aligned}$$

Bien sûr, deux fonctions égales ν presque partout ont la même oscillation essentielle.
On définit une notion de variation dépendant d'un paramètre $\theta > 0$:

$$\mathrm{var}_\theta(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \theta^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} (\sup_P g_n)\mathrm{osc}(f,P)$$

On définit

$$V_\theta = \{f \in L^\infty_\nu \ \mathrm{var}_\theta(f) < \infty\}$$

et on le munit de la norme :

$$\|f\|_\theta = \|f\|_\infty + \mathrm{var}_\theta(f)$$

Contrairement aux observables qui sont définies presque partout pour la mesure conforme ν, on choisit un potentiel défini partout, régulier en un certain sens. Commençons par donner quelques propriétés de l'oscillation essentielle et de la variation.

Lemme 5

$$\overline{osc}(f,P) \leqslant 2\overline{sup}_P|f|$$

Preuve : Soient x et y éléments de P :

$$\begin{array}{rcl} |f(y) - f(x)| & \leqslant & |f(y)| + |f(x)| \\ & \leqslant & 2\overline{\sup}_P|f| \end{array}$$

ceci pour $\nu \times \nu$ presque tous $x, y \in P$. On en déduit :

$$\overline{\mathrm{osc}}(f,P) \leqslant 2\overline{\sup}_P|f|$$

■

Lemme 6

$$\overline{osc}(f_1f_2,P) \leqslant \overline{osc}(f_2,P)\overline{sup}_P|f_1| + \overline{osc}(f_1,P)\overline{sup}_P|f_2|$$

Preuve : Pour $\nu \times \nu$ presque tous $(x,y) \in P \times P$:

$$\begin{array}{rcl} |f_1f_2(y) - f_1f_2(x)| & \leqslant & |f_1(y) - f_1(x)||f_2(y)| + |f_2(y) - f_2(x)||f_1(x)| \\ & \leqslant & \overline{\mathrm{osc}}(f_2,P)\overline{\sup}_P|f_1| + \overline{\mathrm{osc}}(f_1,P)\overline{\sup}_P|f_2| \end{array}$$

Le résultat s'ensuit. ■

Lemme 7 $(V_\theta, \|.\|_\theta)$ *est un espace de Banach.*

Preuve : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(V_\theta, \|.\|_\theta)$, c'est une suite de Cauchy pour $\|.\|_\infty$ et donc elle converge vers une fonction f essentiellement bornée sur Y. On doit montrer :

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{var}_\theta(f - f_p) = 0$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que :

$$\sup_{p,q>N_\varepsilon} \operatorname{var}_\theta(f_p - f_q) < \varepsilon$$

$\lim_{p\to\infty} \|f - f_p\|_\infty = 0$ donc si n est fixé, il existe $N_{\varepsilon,n}$ tel que :

$$p > N_{\varepsilon,n} \Longrightarrow \|f - f_p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\sup_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_P g_n \#\mathcal{P}_n} \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n$$

On peut choisir $N_{\varepsilon,n} \geqslant N_\varepsilon$. Prenons $n_0 > 0$, $n \leqslant n_0$, $p > N_\varepsilon$, $q > max_{n\leqslant n_0} N_{\varepsilon,n}$ et $P \in \mathcal{P}_n$:

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{osc}}(f - f_p, P) &\leqslant \overline{\operatorname{osc}}(f - f_q, P) + \overline{\operatorname{osc}}(f_p - f_q, P) \\
&\leqslant 2\|f - f_q\|_\infty + \overline{\operatorname{osc}}(f_p - f_q, P) \\
&\leqslant \frac{2\varepsilon}{\sup_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_P g_n \#\mathcal{P}_n} \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \\
&+ \overline{\operatorname{osc}}(f_p - f_q, P) \\
\sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_P g_n \overline{\operatorname{osc}}(f - f_p, P) &\leqslant 2\varepsilon \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n + \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_P g_n \overline{\operatorname{osc}}(f_p - f_q, P) \\
\sum_{n=0}^{n_0} \theta^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_P g_n \overline{\operatorname{osc}}(f - f_p, P) &\leqslant 2\varepsilon \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&+ \sum_{n=0}^{n_0} \theta^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_P g_n \overline{\operatorname{osc}}(f_p - f_q, P) \\
&\leqslant 4\varepsilon + \operatorname{var}_\theta(f_p - f_q) \\
&\leqslant 4\varepsilon + \sup_{p,q>N_\varepsilon} \operatorname{var}_\theta(f_p - f_q) \\
&\leqslant 5\varepsilon
\end{aligned}$$

En faisant tendre n_0 vers l'infini, on obtient :

$$p > N_\varepsilon \Longrightarrow \operatorname{var}_\theta(f - f_p) \leqslant 5\varepsilon$$

ce qui conclut la preuve. ∎

Remarque 4 *Pour tout* $n > 0$ *et tout ensemble* P *tel qu'il existe un* n*-cylindre* B *avec* $B \subset P \subset \bar{B}$, $\mathbf{1}_P \in V_\theta$. *En effet, si* $Q \in \mathcal{P}_q$ *avec* $q \geqslant n$, *alors* $osc(\mathbf{1}_P, Q) = 0$. *Si* $q < n$, *alors* B *est inclus dans un seul* q*-cylindre* Q_B*et*

$$\sum_{Q \in \mathcal{P}_q} osc(\mathbf{1}_P, Q) \leqslant \sup_{Q_B} g_q$$

$$var_\theta(\mathbf{1}_P) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \theta^k \sup g_k$$

Le même argument mène à :

$$var_\theta(\mathbf{1}_{P^c}) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \theta^k \sup g_k$$

II.2.2 Hypothèses sur le système

Rappelons les notations :

$$\lambda = \exp(P_{\text{top}}(X))$$

$$\lambda_\partial = \exp(P_{\text{top}}(\partial \mathcal{P}))$$

Tous les résultats de ce chapitre supposent l'existence d'une mesure conforme, c'est pourquoi les hypothèses du théorème 1 restent indispensables. Toutefois, pour les résultats suivants, nous allons faire une hypothèse de distortion bornée sur le potentiel un peu plus contraignante : il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha < 1$ telles que

$$(\mathbf{b'}) \qquad \sup_{P \in \mathcal{P}_n} \sup_{x,y \in P} \left| \frac{g(y)}{g(x)} - 1 \right| \leqslant C\alpha^n$$

cela revient à supposer que le module de continuité de φ est exponentiel, en effet :

$$\left| \frac{g(y)}{g(x)} - 1 \right| \leqslant |\exp(\varphi(x) - \varphi(y)) - 1| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

et si on note :

$$\alpha = \limsup_{n \to \infty} \left(\max_{P \in \mathcal{P}^n} \sup_{x,y \in P} |\varphi(x) - \varphi(y)| \right)^{\frac{1}{n}}$$

on obtient l'hypothèse (b') ; α est donc donné avec le système étudié.
Notre espace fonctionnel dépend d'un paramètre θ. Nous allons maintenant faire

un choix “optimal” de θ, quitte à le justifier plus tard.
Choisissons :

$$1 < \theta' < \min\left(\frac{1}{\alpha}, \exp(P_{\text{top}}(X) - P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}))\right)$$

et

$$\theta = \frac{1}{\lambda}\theta'$$

Le choix de θ' est possible à cause de l'hypothèse essentielle faite sur le système :

$$P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}) < P_{\text{top}}(X)$$

θ étant choisi, il est facile de vérifier que les trois hypothèses suivantes sont satisfaites (hypothèses nécessaires aux preuves des propositions à venir).

(H1) $\theta\alpha\lambda < 1$
(H2) $\theta\lambda > 1$
(H3) $\theta\lambda_\partial < 1$

On fait une dernière hypothèse sur le système qui signifie que l'application n'est ”pas trop non markovienne” : supposons qu'il soit possible de faire un choix de θ compatible avec les conditions précédentes et tel que :

$$(\mathbf{g}) \qquad \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \log S(q) < \log(\theta \exp(P_{\text{top}}(X,T)))$$

où

$$S(q) = \sum_n \theta^n \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_n \\ \bar{P}\cap\partial T^q\mathcal{P}_q\neq\emptyset}} \sup_P g_n$$

Remarque 5 *L'espace V_θ est relativement gros, par exemple, si on se place dans le cadre suivant : (JT étant le jacobien de l'application T)*
- *T de classe $C^{1+\gamma}$ (la dérivée est γ-Hölder continue)*
- *T est uniformément dilatante ($|JT| > \rho > 1$)*
- *$g = \frac{1}{|JT|}$*

Alors, soit $P \in \mathcal{P}_n$ et $x, y \in P$:

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &= \left|\frac{1}{|JT(y)|} - \frac{1}{|JT(x)|}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\rho^2}K(T)(diam\mathcal{P}_n)^\gamma \\ &\leqslant \frac{1}{\rho^2}K(T)\left(\frac{1}{\rho^\gamma}\right)^n \end{aligned}$$

où $K(T)$ est la constante qui intervient dans l'Hölder continuité de la dérivée. Par conséquent, le module de continuité de $\varphi = -\log|JT|$ est exponentiel et, en reprenant nos notations, $\alpha = \frac{1}{\rho^\gamma}$
D'autre part, soit $f \in C^\gamma$ et $P \in \mathcal{P}_n$:

$$osc(f,P) \leqslant K(f)(diam\mathcal{P}_n)^\gamma \leqslant K(f)\left(\frac{1}{\rho^\gamma}\right)^n$$

La série qui définit la variation de f est convergente si et seulement si :

$$(\theta^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_P g_n osc(f,P))^{\frac{1}{n}} < 1$$

avec l'inégalité :

$$(\theta^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_P g_n osc(f,P))^{\frac{1}{n}} < \theta\lambda\frac{1}{\rho^\gamma} = \theta\lambda\alpha < 1$$

d'après l'hypothèse (H1) faite sur le système.
On a donc montré $V_\theta \supset C^\gamma$

II.2.3 Propriétés de l'espace fonctionnel

Dans toute la suite, on notera K les constantes indépendantes du problème.
Sous l'hypothèse **(H1)**, $\mathrm{var}_\theta g < \infty$.
En effet,

$$\theta^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_P g_n \mathrm{osc}(g,P) \leqslant (\theta\alpha)^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_P g_n \sup g$$

et ce dernier terme est celui d'une série convergente si et seulement si :

$$\lim \frac{1}{n}\log\left((\theta\alpha)^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_P g_n\right) < 0$$

ce qui est équivalent à l'hypothèse **(H1)**.

Lemme 8 *Il existe deux constantes C et C' ne dépendant que de $\mathcal{P}$ et θ telles que, pour toute fonction $f \in V_\theta$:*

$$\|f\|_\infty \leqslant C var_\theta f + C'\|f\|_\nu$$

Preuve : Soit $P \in \mathcal{P}$ et $x, y \in P$:

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant |f(y) - f(x)| + |f(y)| \\ &\leqslant \overline{\text{osc}}(f, P) + |f(y)| \end{aligned}$$

pour $\nu \times \nu$ presque tous $(x, y) \in P \times P$. Intégrons par rapport à la mesure conforme ν :

$$\begin{aligned} \overline{\sup}_P |f| &\leqslant \overline{\text{osc}}(f, P) + \frac{1}{\nu(P)} \nu(|f| \mathbf{1}_P) \\ &\leqslant \overline{\text{osc}}(f, P) + \frac{1}{\min_{P \in \mathcal{P}} \nu(P)} \|f\|_\nu \\ \sup_P g \; \overline{\sup}_P |f| &\leqslant \sup_P g \; \overline{\text{osc}}(f, P) + \frac{\sup_P g}{\min_{P \in \mathcal{P}} \nu(P)} \|f\|_\nu \\ &\leqslant \sum_{Q \in \mathcal{P}} \sup_Q g \overline{\text{osc}}(f, Q) + \frac{\sup_P g}{\min_{P \in \mathcal{P}} \nu(P)} \|f\|_\nu \\ &\leqslant \frac{1}{\theta} \text{var}_\theta f + \frac{\sup_P g}{\min_{P \in \mathcal{P}} \nu(P)} \|f\|_\nu \\ \overline{\sup}_P |f| &\leqslant \frac{1}{\theta \min_{P \in \mathcal{P}} \sup_P g} \text{var}_\theta f + \frac{1}{\min_{P \in \mathcal{P}} \nu(P)} \|f\|_\nu \end{aligned}$$

■

Lemme 9 *Si le potentiel est à distorsion bornée en notre sens, alors pour tout $Q \in \mathcal{P}_{n+q}$:*

$$osc(g_n, Q) \leqslant K \alpha^q \sup_Q g_n$$

Preuve : Soient x et y éléments de Q, on a :

$$\begin{aligned} |g_n(y) - g_n(x)| &= \left| \exp\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ T^i y\Big) - \exp\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ T^i x\Big) \right| \\ &= |\exp\varphi(y) - \exp\varphi(x)| \exp\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \varphi \circ T^i y\Big) \\ &\quad + \exp\varphi(x) \left| \exp\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \varphi \circ T^i y\Big) - \exp\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \varphi \circ T^i x\Big) \right| \end{aligned}$$

D'après la propriété de distorsion bornée, x et y étant dans le même (n+q)-cylindre :

$$|g(y) - g(x)| \leqslant \alpha^{n+q} g(y)$$

on obtient donc :

$$|g_n(y) - g_n(x)| \leqslant \alpha^{n+q} g_n(y) + g(x)|g_{n-1}(Ty) - g_{n-1}(Tx)| \tag{3}$$

mais Tx et Ty sont dans le même (n+q-1)-cylindre, donc, par un calcul analogue au précédent, il vient :

$$|g_{n-1}(Ty) - g_{n-1}(Tx)| \leqslant \alpha^{n+q-1} g_{n-1}(Ty) + g(Tx)|g_{n-2}(T^2x) - g_{n-2}(T^2y)|$$

et en reportant dans l'équation 3 :

$$\begin{aligned} |g_n(y) - g_n(x)| &\leqslant \alpha^{n+q} g_n(y) + \alpha^{n+q-1} g(x) g_{n-1}(Ty) \\ &+ g(x) g(Tx) |g_{n-2}(T^2x) - g_{n-2}(T^2y)| \end{aligned} \tag{4}$$

Par induction, on obtient :

$$|g_n(y) - g_n(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{n+q-i} g(x) \dots g(T^{i-1}x) g_{n-i}(T^i y)$$

On utilise alors la propriété de distorsion bornée : puisque x et y sont dans le même (n+q)-cylindre, $T^k(x)$ et $T^k(y)$ sont dans le même (n+q-k)-cylindre et :

$$g(T^k x) \leqslant (1 + K\alpha^{n+q-k}) g(T^k y) \leqslant (1 + K\alpha^{n-k}) g(T^k y)$$

On reporte dans la formule d'induction 4 :

$$\begin{aligned} |g_n(y) - g_n(x)| &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{n+q-i} (1 + K\alpha^n) \dots (1 + K\alpha^{n-i+1}) g_n(y) \\ &\leqslant g_n(y) \alpha^q \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-i} \prod_{k=n-i+1}^{n} (1 + K\alpha^k) \end{aligned}$$

La série produit est convergente (puisque la série $\sum \alpha^n$ l'est) et on peut donc majorer tous les produits partiels par le produit infini. On obtient alors :

$$|g_n(y) - g_n(x)| \leqslant K g_n(y) \alpha^q \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-i} \leqslant K\alpha^q \sup_Q g_n$$

■

Lemme 10 *Pour tout entier q :*

$$P_{\text{top}}(\partial T^q \mathcal{P}^q) \leqslant P_{\text{top}}(\partial \mathcal{P}^q)$$

Preuve : Par définition :

$$P_{\text{top}}(\partial T^q \mathcal{P}^q) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_n \\ \bar{P}\cap\partial T^q\mathcal{P}_q\neq\emptyset}} \sup_P g_n$$

Soit $P \in \mathcal{P}^n$ tel que $\bar{P}\cap\partial T^q\mathcal{P}_q \neq \emptyset$, il existe $Q \in \mathcal{P}^q$ tel que $\overline{Q\cap T_Q^{-q}P}\cap\partial\mathcal{P}^q \neq \emptyset$. De plus, soit $x \in P$:

$$g_n(x) \leqslant \frac{g_{n+q}(T_Q^{-q}(x))}{g_q(T_Q^{-q}(x))} \leqslant \frac{1}{(\inf g)^q} \sup_{Q\cap T_Q^{-q}P} g_{n+q}$$

et donc :

$$\sup_P g_n \leqslant \frac{1}{(\inf g)^q} \sup_{P'} g_{n+q}$$

avec $P' = Q\cap T_Q^{-q}P \in \mathcal{P}^{n+q}$.

$$\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_n \\ \bar{P}\cap\partial T^q\mathcal{P}_q\neq\emptyset}} \sup_P g_n \leqslant \frac{1}{(\inf g)^q} \sum_{\substack{P'\in\mathcal{P}_{n+q} \\ \bar{P}\cap\partial\mathcal{P}_q\neq\emptyset}} \sup_{P'} g_{n+q}$$

On obtient le résultat en prenant la limite thermodynamique. ■

Lemme 11 *Pour tous $P \in \mathcal{P}_n$ et $Q \in \mathcal{P}_q$:*

$$\sup_P g_n \sup_{T_Q^{-q}P} g_q \leqslant K \sup_{T_Q^{-q}P} g_{n+q}$$

Preuve : Soit $x \in P$ et $y = T_Q^{-q}x$:

$$\begin{aligned} g_n(x)g_q(y) &= \exp(\varphi(x)+\ldots+\varphi\circ T^{n-1}(x)+\varphi(y)+\ldots+\varphi\circ T^{q-1}(y)) \\ &= \exp(\varphi\circ T^q(y)+\ldots+\varphi\circ T^{q+n-1}(y)+\varphi(y)+\ldots+\varphi\circ T^{q-1}(y)) \\ &= g_{n+q}(y) \\ &\leqslant \sup_{T_Q^{-q}P} g_{n+q} \end{aligned}$$

Soit alors $z \in T_Q^{-q}P$, d'après le lemme 9 :

$$|g_q(y) - g_q(z)| \leqslant K\alpha^n g_q(y)$$

$$g_q(z) \leqslant (1+K\alpha^n)g_q(y) \leqslant K g_q(y)$$

et

$$g_n(x)g_q(z) \leqslant K g_n(x)g_q(y) \leqslant K \sup_{T_Q^{-q}P} g_{n+q}$$

ceci pour tout $x \in P$ et $z \in T_Q^{-q}P$ ce qui donne le résultat. ■

Lemme 12

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q\\ \bar{P}\cap\partial T^qQ\neq\emptyset}}\sup_P g_n \sup_{T_Q^{-q}P} g_q \leqslant K \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_{n+q}\\ \bar{P}\cap\partial\mathcal{P}_q\neq\emptyset}}\sup_P g_{n+q}$$

Preuve : D'après le lemme 11, on a dejà :

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q\\ \bar{P}\cap\partial T^qQ\neq\emptyset}}\sup_P g_n \sup_{T_Q^{-q}P} g_q \leqslant K \sum_{P\in\mathcal{P}_n}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q\\ \bar{P}\cap\partial T^qQ\neq\emptyset}}\sup_{T_Q^{-q}P} g_{n+q}$$

De plus, soit $P\in\mathcal{P}_n$ tel que $\bar{P}\cap\partial T^qQ\neq\emptyset$ avec $Q\in\mathcal{P}_q$. Il existe une suite (x_n) de points de P qui converge vers $x\in\partial T^qQ$, par conséquent $T_Q^{-q}x\in\partial\mathcal{P}_q$ et on peut en déduire :

$$\overline{T_Q^{-q}P}\cap\partial\mathcal{P}_q\neq\emptyset$$

On obtient l'inégalité voulue. ■

Lemme 13 *Pout tout entier $q\geqslant 1$:*

$$P_{\mathrm{top}}(\partial\mathcal{P}_q)\leqslant P_{\mathrm{top}}(\partial\mathcal{P})$$

Preuve : On a la relation suivante entre les bords des itérés des partitions :

$$\partial\mathcal{P}_q=\partial\mathcal{P}\cup\ldots T^{-q+1}\partial\mathcal{P}$$

D'une part, si $P\in\mathcal{P}_n$ avec $\bar{P}\cap\partial\mathcal{P}_q\neq\emptyset$, il existe $k\in\{0,\ldots,q-1\}$ tel que $\bar{P}\cap T^{-k}\partial\mathcal{P}\neq\emptyset$ et $\overline{T^kP}\cap\partial\mathcal{P}\neq\emptyset$
T^kP étant inclus dans un unique (n-k)-cylindre P', on a $\overline{P'}\cap\partial\mathcal{P}\neq\emptyset$.
D'autre part :

$$\begin{aligned}
\sup_P g_n &= \sup_P \exp(\varphi+\varphi\circ T+\ldots+\varphi\circ T^{n-1})\\
&\leqslant \sup g_k \sup_P \exp(\varphi\circ T^k+\ldots+\varphi\circ T^{n-1})\\
&\leqslant \sup g_k \sup_P g_{n-k}\circ T^k\\
&\leqslant \sup g_k \sup_{T^k(P)} g_{n-k}\\
&\leqslant \sup g_k \sup_{P'} g_{n-k}
\end{aligned}$$

Cela mène à l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_n\\ \bar{P}\cap\partial\mathcal{P}_q\neq\emptyset}}\sup_P g_n &\leqslant K(0,n)\sum_{\substack{P'\in\mathcal{P}_n\\ \bar{P'}\cap\partial\mathcal{P}\neq\emptyset}}\sup_{P'} g_n+\ldots\\
&+ K(q-1,n)\left(\sum_{\substack{P'\in\mathcal{P}^{n-q+1}\\ \bar{P'}\cap\partial\mathcal{P}\neq\emptyset}}\sup_{P'} g_{n-q+1}\right)\sup g_{q-1}
\end{aligned}$$

avec $K(i,n) = \max_{P' \in \mathcal{P}_{n-i}} \#\{P \in \mathcal{P}_n, T^i P \subset P'\}$.
A l'aide des majorations $\forall n, \forall i \in \{0, \dots q-1\}$: $K(i,n) \leqslant (\#\mathcal{P})^i$, on obtient :

$$\sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_n \\ \bar{P} \cap \partial \mathcal{P}_q \neq \emptyset}} \sup_P g_n \leqslant \sum_{\substack{P' \in \mathcal{P}_n \\ \bar{P}' \cap \partial \mathcal{P} \neq \emptyset}} \sup_{P'} g_n + \dots \left(\sum_{\substack{P' \in \mathcal{P}^{n-q+1} \\ \bar{P}' \cap \partial \mathcal{P} \neq \emptyset}} \sup_{P'} g_{n-q+1} \right) \sup g_{q-1} (\#\mathcal{P})^{q-1}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, pour tour $n > N$ et tout $k \in \{0, \dots, q-1\}$:

$$\sum_{\substack{P' \in \mathcal{P}^{n-k} \\ \bar{P}' \cap \partial \mathcal{P} \neq \emptyset}} \sup_{P'} g_{n-k} \leqslant e^{(n-k)P_{\text{top}}(\partial \mathcal{P})} e^{(n-k)\varepsilon}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_n \\ \bar{P} \cap \partial \mathcal{P}_q \neq \emptyset}} \sup_P g_n &\leqslant e^{nP_{\text{top}}(\partial \mathcal{P})} e^{n\varepsilon} + \dots + e^{(n-q+1)P_{\text{top}}(\partial \mathcal{P})} e^{(n-q+1)\varepsilon} \sup g_{q-1} \\ &\leqslant e^{nP_{\text{top}}(\partial \mathcal{P})} e^{n\varepsilon} \left(1 + \frac{\sup g_1 \#\mathcal{P}}{e^{\varepsilon + P_{\text{top}}(\partial \mathcal{P})}} + \dots + \frac{\sup g_{q-1} (\#\mathcal{P})^{q-1}}{e^{(q-1)(\varepsilon + P_{\text{top}}(\partial \mathcal{P}))}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_n \\ \bar{P} \cap \partial \mathcal{P}_q \neq \emptyset}} \sup_P g_n &\leqslant \varepsilon + P_{\text{top}}(\partial \mathcal{P}) \\ &+ \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{\sup g_1 \#\mathcal{P}}{e^{\varepsilon + P_{\text{top}}(\partial \mathcal{P})}} + \dots + \frac{\sup g_{q-1} (\#\mathcal{P})^{q-1}}{e^{(q-1)(\varepsilon + P_{\text{top}}(\partial \mathcal{P}))}} \right) \end{aligned}$$

En passant à la limite d'abord sur n, puis en faisant tendre ε vers zéro, on obtient l'inégalité annoncée. ■

II.3 Action de l'opérateur de transfert sur V_θ

II.3.1 Continuité de l'opérateur sur V_θ

Lemme 14 *Sous les hypothèses* **(H1)** *et* **(H3)** *: V_θ est stable par L. De plus, L est continu pour la norme $\|.\|_\theta$.*

Preuve : Rappelons que l'opérateur de transfert peut être écrit de la manière suivante :

$$Lf = \sum_{B \in \mathcal{P}} (e^{\varphi} f) \circ T_B^{-1} \mathbf{1}_{T(B)}$$

où T_B^{-1} désigne l'inverse de $T : B \to T(B)$. On s'intéresse en premier lieu à la partie variation de la norme.
Soient $f \in V_\theta$, $n \geqslant 0$ et $P \in \mathcal{P}_n$:

$$\overline{\mathrm{osc}}(Lf, P) \leqslant \sum_{B \in \mathcal{P}} \overline{\mathrm{osc}}((e^{\varphi} f) \circ T_B^{-1} \mathbf{1}_{T(B)}, P) \tag{5}$$

Dans les termes de la somme qui précède, on a la dichotomie suivante : ou bien $P \subset T(B)$, ou bien $\bar{P} \cap \partial T(B) \neq \emptyset$.
Si $P \subset T(B)$ alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{osc}((gf) \circ T_B^{-1} \mathbf{1}_{T(B)}, P) &\leqslant \sup_{x,y \in P} |(gf) \circ T_B^{-1}(y) \mathbf{1}_{T(B)}(y) - (gf) \circ T_B^{-1}(x) \mathbf{1}_{T(B)}(x)| \\ &= \sup_{x,y \in P} |(gf) \circ T_B^{-1}(y) - (gf) \circ T_B^{-1}(x)| \\ &= \mathrm{osc}((gf) \circ T_B^{-1}, P) \end{aligned}$$

Par contre, si $\bar{P} \cap \partial T(B) \neq \emptyset$ on distingue les situations suivantes :
Pour $\nu \times \nu$ presque tous $(x_1, x_2) \in (P \cap T(B)) \times (P \cap T(B)^c)$:

$$\begin{aligned} |(gf) \circ T_B^{-1}(x_2) \mathbf{1}_{T(B)}(x_2) &- (gf) \circ T_B^{-1}(x_1) \mathbf{1}_{T(B)}(x_1)| = |(gf) \circ T_B^{-1}(x_1)| \\ &\leqslant \overline{\sup}_{P \cap T(B)} |(gf) \circ T_B^{-1}| \end{aligned}$$

Pour $\nu \times \nu$ presque tous $(x_1, x_2) \in (P \cap T(B)) \times (P \cap T(B))$:

$$\begin{aligned} |(gf) \circ T_B^{-1}(x_2) \mathbf{1}_{T(B)}(x_2) &- (gf) \circ T_B^{-1}(x_1) \mathbf{1}_{T(B)}(x_1)| \\ &\leqslant |(gf) \circ T_B^{-1}(x_1)| + |(gf) \circ T_B^{-1}(x_2)| \\ &\leqslant 2\overline{\sup}_{P \cap T(B)} |(gf) \circ T_B^{-1}| \end{aligned}$$

Pour $\nu \times \nu$ presque tous $(x_1, x_2) \in (P \cap T(B)^c) \times (P \cap T(B)^c)$:

$$|(gf) \circ T_B^{-1}(x_2) \mathbf{1}_{T(B)}(x_2) - (gf) \circ T_B^{-1}(x_1) \mathbf{1}_{T(B)}(x_1)| = 0$$

En résumé,Pour $\nu \times \nu$ presque tous $(x_1, x_2) \in P \times P$:

$$|(gf) \circ T_B^{-1}(x_2) \mathbf{1}_{T(B)}(x_2) - (gf) \circ T_B^{-1}(x_1) \mathbf{1}_{T(B)}(x_1)| \leqslant 2\overline{\sup}_{P \cap T(B)} |(gf) \circ T_B^{-1}|$$

$$\overline{\mathrm{osc}}((gf) \circ T_B^{-1} \mathbf{1}_{T(B)}, P) \leqslant 2\overline{\sup}_{P \cap T(B)} |(gf) \circ T_B^{-1}|$$

la somme 5 se sépare donc en deux parties :

$$(5) \leqslant \sum_{\substack{B\in\mathcal{P}\\ P\subset T(B)}} \overline{\mathrm{osc}}((e^{\varphi}f)\circ T_B^{-1}, P) + 2 \sum_{\substack{B\in\mathcal{P}\\ \bar{P}\cap\partial T(B)\neq\emptyset}} \overline{\sup}_{P\cap T(B)}(e^{\varphi}f)\circ T_B^{-1}$$

On utilise alors la relation du lemme 6

$$\overline{\mathrm{osc}}(gf, T_B^{-1}P) \leqslant \mathrm{osc}(g, T_B^{-1}P)\overline{\sup}_{T_B^{-1}P} f + \overline{\mathrm{osc}}(f, T_B^{-1}P) \sup_{T_B^{-1}P} g$$

On a à estimer les trois termes suivants qui interviennent dans la variation de Lf : (cet argument reviendra dans les calculs suivants)

$$\begin{aligned}
\theta^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_P g_n \overline{\mathrm{osc}}(Lf, P) \quad &\leqslant \quad \theta^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sum_{\substack{B\in\mathcal{P}\\ P\subset T(B)}} \sup_P g_n \mathrm{osc}(g, T_B^{-1}P) \sup_{T_B^{-1}P} |f| && (6)\\
&+ \quad \theta^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sum_{\substack{B\in\mathcal{P}\\ P\subset T(B)}} \sup_P g_n \overline{\mathrm{osc}}(f, T_B^{-1}P) \sup_{T_B^{-1}P} g && (7)\\
&+ \quad 2\theta^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sum_{\substack{B\in\mathcal{P}\\ \bar{P}\cap\partial TB\neq\emptyset}} \sup_P g_n \sup_{T_B^{-1}P} |f| \sup_{T_B^{-1}P} g && (8)
\end{aligned}$$

Pour le premier terme, on utilise les lemmes 9 et 11 pour obtenir :

$$\begin{aligned}
(6) \quad &\leqslant \quad \theta^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sum_{\substack{B\in\mathcal{P}\\ P\subset T(B)}} \sup_P g_n \sup_{T_B^{-1}P} g\alpha^{n+1} \sup_{T_B^{-1}P} |f|\\
&\leqslant \quad K\theta^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sum_{\substack{B\in\mathcal{P}\\ P\subset T(B)}} \sup_{T_B^{-1}P} g_{n+1}\alpha^{n+1} \sup_{T_B^{-1}P} |f|\\
&\leqslant \quad \frac{K}{\theta}(\theta\alpha)^{n+1} \sum_{P\in\mathcal{P}^{n+1}} \sup_P g_{n+1} \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

sous l'hypothèse **(H1)**, on a le terme général d'une série convergente.
Pour le second terme, l'estimation est la suivante (en utilisant le lemme 11) :

$$\begin{aligned}
(7) \quad &\leqslant \quad K\theta^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sum_{\substack{B\in\mathcal{P}\\ P\subset T(B)}} \sup_{T_B^{-1}P} g_{n+1} \overline{\mathrm{osc}}(f, T_B^{-1}P)\\
&\leqslant \quad K\theta^n \sum_{P\in\mathcal{P}^{n+1}} \sup_P g_{n+1} \overline{\mathrm{osc}}(f, P)
\end{aligned}$$

c'est le terme général d'une série convergente et en sommant sur n :

$$\sum_n (7) \leqslant \frac{1}{\theta}\mathrm{var}_\theta f$$

Pour le troisième terme, on utilise le lemme 12 :

$$(8) \leqslant 2K\theta^n \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}^{n+1}\\ P\cap\partial\mathcal{P}\neq\emptyset}} \sup_P g_{n+1}\|f\|_\infty$$

sous l'hypothèse **(H3)**, on a le terme général d'une série convergente.
Quant à la partie sup de la norme, on a :

$$\begin{aligned}\|Lf\|_\infty &\leqslant \sup_X \left|\sum_{P\in\mathcal{P}} \|f\|_\infty g\circ T_P^{-1}\mathbf{1}_{T(P)}\right|\\ &\leqslant \|L\mathbf{1}\|_\infty\|f\|_\infty\\ &\leqslant \|g\|_\infty \#\mathcal{P}\|f\|_\infty\end{aligned}$$

En rassemblant les deux résultats, on obtient une constante $k(\varphi)$ telle que :

$$\|Lf\|_\theta \leqslant k(\varphi)\|f\|_\theta$$

■

II.3.2 Inégalité de Lasota Yorke.

Rappelons que $\mathcal{L} = \frac{1}{\lambda}L$.
Dans ce paragraphe, on établit une inégalité qui montre comment évolue la variation d'une fonction lorsqu'on l'itère par l'opérateur de transfert. Cette inégalité joue le même rôle que l'inégalité dans l'article original de Lasota et Yorke .[LY]
Obtenir l'inégalité suivante avec la norme $\|\cdot\|_\nu$ est indispensable pour montrer que $\mathcal{L}^n\mathbf{1}$ est uniformément borné (lemme 15) et ainsi avoir la décomposition spectrale souhaitée de $\mathcal{L}$.

Proposition 3 *Il existe* q_0, $\zeta < 1$, $C_1 > 0$ *et* $C_2 > 0$ *tels que pout tout* $f \in V_\theta,\ f \geqslant 0, \forall q \geqslant q_0$ *:*

$$var_\theta(\mathcal{L}^q(f)) \leqslant C_1\zeta^{\left[\frac{q}{q_0}\right]}\ var_\theta(f) + C_2\|f\|_\nu$$

Preuve :

$$\mathcal{L}^q f = \frac{1}{\lambda^q}\sum_{P\in\mathcal{P}_q}(g_q f)\circ T_P^{-q}\mathbf{1}_{T^q(P)}$$

$$\overline{\text{osc}}(\mathcal{L}^q f, A) \leqslant \frac{1}{\lambda^q}\sum_{P\in\mathcal{P}_q}\overline{\text{osc}}((g_q f)\circ T_P^{-q}\mathbf{1}_{T^q(P)}, A) \tag{9}$$

Pour la même raison que dans la preuve de la continuité de l'opérateur de transfert sur V_θ, on doit estimer trois contributions à la variation de l'itéré de l'opérateur $\mathcal{L} = \frac{1}{\lambda} L$:

$$\begin{aligned}
\theta^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_P g_n \overline{\mathrm{osc}}(\mathcal{L}^q f, P) &\leqslant \frac{\theta^n}{\lambda^q} \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q \\ P\subset T^q Q}} \sup_P g_n \mathrm{osc}(g_q, T_Q^{-q} P) \sup_{T_Q^{-q}P} |f| \quad (10) \\
&+ \frac{\theta^n}{\lambda^q} \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q \\ P\subset T^q Q}} \sup_P g_n \overline{\mathrm{osc}}(f, T_Q^{-q} P) \sup_{T_Q^{-q}P} g_q \quad (11) \\
&+ 2\frac{\theta^n}{\lambda^q} \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q \\ \bar{P}\cap\partial T^q Q\neq\emptyset}} \sup_P g_n \sup_{T_Q^{-q}P} |f| \sup_{T_Q^{-q}P} g_q \quad (12)
\end{aligned}$$

Pour le premier terme (10), utilisons le lemme 9 ainsi que l'inégalité suivante :

$$\sup_Q f \leqslant \overline{\mathrm{osc}}(f, Q) + \frac{1}{\nu(Q)} \nu(f \mathbf{1}_Q)$$

$$\begin{aligned}
(10) \quad &\leqslant 2\frac{\theta^n}{\lambda^q} \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q \\ P\subset T^q Q}} \sup_P g_n \sup_{T_Q^{-q}P} g_q \alpha^n \overline{\mathrm{osc}}(f, Q) \quad (13) \\
&+ 2\frac{\theta^n}{\lambda^q} \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q \\ P\subset T^q Q}} \sup_P g_n \sup_{T_Q^{-q}P} g_q \alpha^n \frac{1}{\nu(Q)} \nu(|f| \mathbf{1}_Q) \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(13) \quad 2 \leqslant &\frac{\theta^n}{\lambda^q} \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q \\ P\subset T^q Q}} \sup_P g_n \sup_Q g_q \alpha^n \overline{\mathrm{osc}}(f, Q) \\
\leqslant \quad &2\frac{1}{(\theta\lambda)^q} \theta^q \sum_{Q\in\mathcal{P}_q} \sup_Q g_q \overline{\mathrm{osc}}(f, Q) \left((\alpha\theta)^n \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_P g_n \right)
\end{aligned}$$

La série en n converge d'apreś l'hypothèse **(H1)**donc

$$\sum_n (13) \leqslant \frac{K}{(\theta\lambda)^q} \mathrm{var}_\theta f$$

Pour le terme 14, on utilise le lemme 11 :

$$\begin{aligned}
(14) \quad &\leqslant \frac{K\theta^n}{\lambda^q \min_{Q\in\mathcal{P}_q} \nu(Q)} \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q \\ P\subset T^q(Q)}} \sup_{T_Q^{-q}P} g_{n+q} \alpha^n \|f\|_\nu \\
&\leqslant \frac{K}{(\theta\alpha\lambda)^q \min_{Q\in\mathcal{P}_q} \nu(Q)} (\theta\alpha)^{n+q} \sum_{P\in\mathcal{P}_{n+q}} \sup_P g_{n+q} \|f\|_\nu
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse **(H1)**, on a encore une série convergente en n et :

$$\sum_n (14) \leqslant K(q)\|f\|_\nu$$

Pour le second terme (11), l'estimation est la suivante (en utilisant le lemme 11) :

$$\begin{aligned}
(11) &\leqslant K\frac{\theta^n}{\lambda^q}\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q\\ P\subset T^q(Q)}}\sup_{T_Q^{-q}P} g_{n+q}\mathrm{osc}(f,T_Q^{-q}P)\\
&\leqslant K\frac{\theta^n}{\lambda^q}\sum_{P\in\mathcal{P}_{n+q}}\sup_P g_{n+q}\mathrm{osc}(f,P)
\end{aligned}$$

on a le terme général d'une série convergente et en sommant sur n, on obtient :

$$\sum_n (11) \leqslant \frac{K}{(\theta\lambda)^q}\mathrm{var}_\theta f$$

sous l'hypothèse **(H2)**, on a un terme qui tend vers zéro avec q.
Pour le troisième terme, on réutilise l'inégalité :

$$\sup_Q f \leqslant \overline{\mathrm{osc}}(f,Q) + \frac{1}{\nu(Q)}\nu(f\mathbf{1}_Q)$$

$$\begin{aligned}
(12) &\leqslant 2\frac{\theta^n}{\lambda^q}\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q\\ \bar{P}\cap\partial T^qQ\neq\emptyset}}\sup_P g_n \sup_{T_Q^{-q}P} g_q\frac{1}{\nu(Q)}\nu(f\mathbf{1}_Q) &(15)\\
&+ 2\frac{\theta^n}{\lambda^q}\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q\\ \bar{P}\cap\partial T^qQ\neq\emptyset}}\sup_P g_n \sup_{T_Q^{-q}P} g_q\overline{\mathrm{osc}}(f,Q) &(16)
\end{aligned}$$

D'après le lemme 12 :

$$\begin{aligned}
(15) &\leqslant 2\frac{\theta^n}{\lambda^q\min_{Q\in\mathcal{P}^q}\nu(Q)}\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_{n+q}\\ \bar{P}\cap\partial\mathcal{P}_q\neq\emptyset}}\sup_P g_{n+q}\|f\|_\nu\\
&\leqslant 2\frac{1}{(\theta\lambda)^q\min_{Q\in\mathcal{P}^q}\nu(Q)}\theta^{n+q}\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_{n+q}\\ \bar{P}\cap\partial\mathcal{P}_q\neq\emptyset}}\sup_P g_{n+q}\|f\|_\nu
\end{aligned}$$

On somme sur n, la série converge car, d'après le lemme 13 :

$$\theta\exp(P_{\mathrm{top}}(\partial\mathcal{P}^q)) \leqslant \theta\exp(P_{\mathrm{top}}(\partial\mathcal{P})) < 1$$

$$\sum_n (15) \leqslant K(q)\|f\|_\nu$$

Quant au terme 16 :

$$\begin{aligned}
(16) \quad &\leqslant \frac{2}{(\theta\lambda)^q}\theta^q \sum_{Q\in\mathcal{P}^q} \sup_Q g_q \overline{\mathrm{osc}}(f,Q)\theta^n \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_n\\ \bar{P}\cap\partial T^q\mathcal{P}_q\neq\emptyset}} \sup_P g_n \\
&\leqslant \frac{\mathrm{var}_\theta f}{(\theta\lambda)^q}\theta^n \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_n\\ \bar{P}\cap\partial T^q\mathcal{P}_q\neq\emptyset}} \sup_P g_n
\end{aligned}$$

On somme alors sur n, la série converge car, d'après les lemmes 10 et 13 :

$$\theta\exp(P_{\mathrm{top}}(\partial T^q\mathcal{P}^q)) \leqslant \theta\exp(P_{\mathrm{top}}(\partial\mathcal{P}^q)) \leqslant \theta\exp(P_{\mathrm{top}}(\partial\mathcal{P})) < 1$$

mais le comportement en q de la somme de la série

$$S(q) = \sum_n \theta^n \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_n\\ \bar{P}\cap\partial T^q\mathcal{P}_q\neq\emptyset}} \sup_P g_n$$

peut détruire la contraction assurée par $\frac{1}{(\theta\lambda)^q}$, il faut donc faire l'hypothèse supplémentaire :

$$(\mathbf{g}) \qquad \lim_{q\to\infty}\frac{1}{q}\log S(q) < \log(\theta\lambda)$$

On obtient alors l'inégalité suivante :

$$\mathrm{var}_\theta\mathcal{L}^q f \leqslant K\frac{1+S(q)}{(\theta\lambda)^q}\mathrm{var}_\theta f + K(q)\|f\|_\nu$$

Sous l'hypothèse (g),il existe $\zeta < 1$ et q_0 tels que, pour tout entier $q > q_0$:

$$K\frac{1+S(q)}{(\theta\lambda)^q} < \zeta^q$$

Soit $q > q_0$, il existe $k > 0$ et $r < q_0$ tels que $q = kq_0 + r$.
On peut montrer d'une manière classique que, puisque la mesure ν est conforme, on a :

$$\mathrm{var}_\theta\mathcal{L}^{kq_0} \leqslant \zeta^k\mathrm{var}_\theta f + K(q_0)(1+\zeta+\ldots+\zeta^{k-1})\|f\|_\nu$$

On en déduit facilement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_\theta\mathcal{L}^q f &\leqslant \zeta^k\mathrm{var}_\theta\mathcal{L}^r f + K(q_0)(1+\zeta+\ldots+\zeta^{k-1})\|f\|_\nu \\
&\leqslant \zeta^k\frac{K}{(\theta\lambda)^r}\mathrm{var}_\theta f + (K(r)\zeta^k + \frac{K(q_0)}{1-\zeta})\|f\|_\nu \\
&\leqslant C_1\zeta^k\mathrm{var}_\theta f + C_2\|f\|_\nu
\end{aligned}$$

avec $C_1 = \min_{i<q_0}\frac{K}{(\theta\lambda)^i}$ et $C_2 = \min_{i<q_0} K(i) + \frac{K(q_0)}{1-\zeta}$. ■

Lemme 15 $\mathcal{L}^n\mathbf{1}$ *est borné uniformément en* n.

Preuve : Soit $n \geqslant q_0$. D'après le lemme 8 :

$$\|\mathcal{L}^n\mathbf{1}\|_\infty \leqslant C\mathrm{var}_\theta\mathcal{L}^n\mathbf{1} + C'\|\mathcal{L}^n\mathbf{1}\|_\nu$$

La mesure ν étant conforme, on a :

$$\|\mathcal{L}^n\mathbf{1}\|_\nu = \nu(\mathcal{L}^n\mathbf{1}) = \nu(\mathbf{1}) = 1$$

et en utilisant l'inégalité de Lasota-Yorke :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}^n\mathbf{1}\|_\infty &\leqslant C(C_1\zeta^{\left[\frac{n}{q_0}\right]}\mathrm{var}_\theta\mathbf{1} + C_2\|\mathbf{1}\|_\nu) + C' \\ &\leqslant CC_2 + C' \end{aligned}$$

■

Remarque 6 *A ce stade, puisqu'on a une inégalité de Lasota-Yorke et que* $(\|\mathcal{L}^n\mathbf{1}\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée, il est naturel de penser au théorème de Ionescu-Tulcea, Marinescu [ITM] (une inégalité de Lasota-Yorke et la compacité dans* L^∞ *de la boule unité de* V_θ *impliquent la quasicompacité de l'opérateur). Il apparaît que notre espace de fonctions à variation bornée, que l'on doit considérer muni de la norme de* L^∞*, n'a pas les bonnes propriétés de compacité dans* L^∞.

II.4 Approximation par des opérateurs compacts

Un opérateur Q sur un espace de Banach B est dit compact si l'adhérence de l'image de la boule unité par Q est compacte.

Un opérateur compact a de "bonnes" propriétés du point de vue spectral, c'est-à-dire que son spectre est au plus dénombrable et ne possède pas de point d'accumulation éventuel autre que zéro. Tout élément non nul du spectre est une valeur propre pour l'opérateur et le sous espace propre associé est de dimension finie (voir [DS]). Dans ce cas, on a de façon évidente un trou spectral, c'est-à-dire une distance strictement positive entre le complémentaire du spectre et la partie continue du spectre (qui est réduite à zéro dans le cas compact).
S'il est possible d'approcher un opérateur borné par une suite d'opérateurs compacts, alors certaines de ces propriétés restent valables, notamment l'existence d'un trou spectral. On définit un opérateur quasicompact de la façon suivante (voir [HH]) :

Définition 2 *On dit que Q, opérateur continu sur un espace de Banach B, est quasicompact si on a une décomposition en sous espaces fermés, stables par Q :*

$$B = F \oplus H$$

où F est de dimension finie et $Q\,|_F$ n'a que des valeurs propres de modules $r(Q)$, avec

$$r(Q\,|_H) < r(Q)$$

Notre but est d'approcher les itérés de l'opérateur $\mathcal{L}$ par une suite d'opérateurs compacts.

Définissons l'opérateur suivant (qui agit sur les fonctions de V_θ) :

$$\mathcal{A}_q f = \mathcal{L}^q \mathbb{E}_\nu(f/\mathcal{P}_q)$$

où $\mathbb{E}_\nu(f/\mathcal{P}_q)$ est l'espérance conditionnelle de f par rapport à la partition $\mathcal{P}_q$ c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}_\nu(f/\mathcal{P}_q)(x) = \frac{1}{\nu(\mathcal{P}_q(x))}\nu(f\mathbf{1}_{\mathcal{P}_q(x)})$$

f étant fixée, $\mathbb{E}_\nu(f/\mathcal{P}_q)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes. $\mathcal{L}^q$ étant un opérateur continu, il n'est pas très difficile de vérifier que $\mathcal{L}^q\mathbb{E}_\nu(\cdot/\mathcal{P}_q)$ est un opérateur compact.
Notons :

$$f_q = f - \mathbb{E}_\nu(f/\mathcal{P}_q)$$

Alors on a l'approximation suivante :

Proposition 4 *Il existe $\zeta_0 < 1$ tel que, pour q assez grand et pour tout $f \in V_\theta$:*

$$\|\mathcal{L}^q f - \mathcal{A}_q f\|_\theta \leqslant K\zeta_0^q \|f\|_\theta$$

Preuve : Nous devons montrer que $\|\mathcal{L}^q f - \mathcal{A}_q f\|_\theta$ tend exponentiellement vers zero lorsque q tend vers l'infini.
Pour la partie sup de la norme :

$$\|\mathcal{L}^q f - \mathcal{A}_q f\|_\infty \leqslant \frac{1}{\lambda^q}\sum_{Q\in\mathcal{P}^q}\sup_X (g_q \circ T_Q^{-q}\mathbf{1}_{T^q Q}|f\circ T_Q^{-q} - \mathbb{E}_\nu(f/\mathcal{P}_q)\circ T_Q^{-q}|)$$

de plus,

$$\mathbb{E}_\nu(f/\mathcal{P}_q)\circ T_Q^{-q} = \frac{1}{\nu(Q)}\nu(f\mathbf{1}_Q)$$

et si $x \in T^q Q$ alors $y = T_Q^{-q}(x) \in Q$ et

$$\begin{aligned}
\left| f(y) - \frac{1}{\nu(Q)}\nu(f\mathbf{1}_Q) \right| &= \left| \frac{1}{\nu(Q)} \int_Q f(y) d\nu(z) - \frac{1}{\nu(Q)} \int_Q f(z) d\nu(z) \right| \\
&\leqslant \frac{1}{\nu(Q)} \int_Q |f(y) - f(z)| d\nu(z) \\
&\leqslant \frac{1}{\nu(Q)} \int_Q \overline{\text{osc}}(f, Q) d\nu(z) \\
&\leqslant \overline{\text{osc}}(f, Q)
\end{aligned}$$

nous venons donc de montrer :

$$\overline{\text{sup}}_Q |f_q| \leqslant \overline{\text{osc}}(f, Q) \tag{17}$$

Il en découle :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}^q f - \mathcal{A}_q f\|_\infty &\leqslant \frac{1}{\lambda^q} \sum_{Q \in \mathcal{P}_q} \sup_Q g_q \overline{\text{osc}}(f, Q) \\
&\leqslant \frac{1}{(\lambda\theta)^q} \text{var}_\theta f
\end{aligned}$$

ceci tend exponentiellement vers zero à cause de l'hypothèse **(H2)**.
Pour la partie variation de la norme, la stratégie est similaire à celle employée pour montrer l'inégalité de Lasota-Yorke, toutefois, il est indispensable de reprendre les calculs. Là encore, trois termes doivent être estimés :

$$\begin{aligned}
&\theta^n \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \sup_P g_n \overline{\text{osc}}(\mathcal{L}^q f_q, P) \\
\leqslant\ & \frac{\theta^n}{\lambda^q} \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{P}_q \\ P \subset T^q Q}} \sup_P g_n \overline{\text{osc}}(f_q, T_Q^{-q} P) \sup_{T_Q^{-q} P} g_q && (18) \\
+\ & \frac{\theta^n}{\lambda^q} \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{P}_q \\ P \subset T^q Q}} \sup_P g_n \text{osc}(g_q, T_Q^{-q} P) \sup_{T_Q^{-q} P} |f_q| && (19) \\
+\ & 2\frac{\theta^n}{\lambda^q} \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{P}_q \\ \bar{P} \cap \partial T^q Q \neq \emptyset}} \sup_P g_n \sup_{T_Q^{-q} P} |f_q| \sup_{T_Q^{-q} P} g_q && (20)
\end{aligned}$$

Pour le premier terme, $T_Q^{-q} P \in \mathcal{P}_{n+q}$ et :

$$\overline{\text{osc}}(f_q, T_Q^{-q} P) = \sup_{x,y \in T_Q^{-q} P} |f(y) - \mathbb{E}_\nu(f/\mathcal{P}_q)(y) - f(x) + \mathbb{E}_\nu(f/\mathcal{P}_q)(x)|$$

x et y étant dans le même cylindre d'ordre $n+q$, ils sont dans le même cylindre d'ordre q et donc :

$$\mathbb{E}_\nu(f/\mathcal{P}_q)(x) = \mathbb{E}_\nu(f/\mathcal{P}_q)(y)$$

on en déduit : $\overline{\mathrm{osc}}(f_q, T_Q^{-q}P) = \overline{\mathrm{osc}}(f, T_Q^{-q}P)$ et

$$(18) \leqslant (11) \leqslant \frac{K}{(\theta\lambda)^q}\mathrm{var}_\theta f$$

Pour le deuxième terme, on doit faire usage de l'inégalité 17 et du lemme 9 :

$$\begin{aligned}
(19) \quad &\leqslant K\frac{\theta^n}{\lambda^q}\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q\\ P\subset T^qQ}}\sup_P g_n \sup_{T_Q^{-q}P} g_q\alpha^q\overline{\mathrm{osc}}(f,Q)\\
&\leqslant K\frac{\theta^n}{\lambda^q}\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q\\ P\subset T^qQ}}\sup_P g_n \sup_Q g_q\alpha^q\overline{\mathrm{osc}}(f,Q)\\
&\leqslant \frac{K}{(\theta\lambda)^q}\left(\theta^q\sum_{Q\in\mathcal{P}_q}\sup_Q g_q\overline{\mathrm{osc}}(f,Q)\right)\left((\theta\alpha)^n\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\sup_P g_n\right)
\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse **(H1)**, la série en n est convergente et on obtient :

$$\sum_n (19) \leqslant \frac{K}{(\theta\lambda)^q}\mathrm{var}_\theta f$$

Pour le troisième terme, on utilise l'inégalité 17 :

$$(20) \leqslant 2\frac{\theta^n}{\lambda^q}\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_q\\ \bar{P}\cap\partial T^qQ\neq\emptyset}}\sup_P g_n \sup_{T_Q^{-q}P} g_q\overline{\mathrm{osc}}(f,Q) = (16)$$

et donc

$$\sum_n (20) \leqslant \frac{S(q)}{(\theta\lambda)^q}\mathrm{var}_\theta f$$

En définitive :

$$\mathrm{var}_\theta\mathcal{L}^q f_q \leqslant \frac{K+S(q)}{(\theta\lambda)^q}\mathrm{var}_\theta f$$

Avec l'hypothèse :

$$(\mathbf{g}) \qquad \lim_{q\to\infty}\frac{1}{q}\log S(q) < \log(\theta\lambda)$$

il existe $\zeta_1 < 1$ et q_0 tels que, pour $q > q_0$,

$$\frac{K+S(q)}{(\theta\lambda)^q} \leqslant \zeta_1^q$$

on a le résultat avec $\zeta_0 = \max(\zeta_1, \frac{1}{\theta\lambda})$ ■

On a montré qu'on pouvait approcher les itérés de l'opérateur de transfert par une suite d'opérateurs compacts. Toutes les propriétés spectrales de l'opérateur de transfert $\mathcal{L}$ vont suivre ainsi que l'existence d'une densité invariante, d'une mesure invariante et la décroissance exponentielle des corrélations.

II.5 Quasicompacité de l'opérateur

La quasi-compacité de l'opérateur permet d'isoler les valeurs propres qui ont un module égal au rayon spectral du reste du spectre qui est inclus dans un disque de rayon strictement inférieur au rayon spectral. Ceci donne l'existence d'une densité invariante. Pour obtenir la décroissance des corrélations, il faut encore prouver que le rayon spectral est une valeur propre simple et que c'est la seule sur le cercle de ce rayon. C'est l'objet des lemmes suivants.
Rappelons la définition du rayon spectral d'un opérateur :

Soit Q un opérateur sur un espace de Banach B, le rayon spectral de Q est défini comme suit :

$$r(Q) = \lim_{n\to\infty} (\|Q^n\|_B)^{\frac{1}{n}}$$

Lemme 16 *Le rayon spectral $r(\mathcal{L})$de $\mathcal{L}$ est egal à 1.*

Preuve : D'une part, soit $f \in V_\theta$ et $n > q_0$, d'après le lemme 15 :

$$\|\mathcal{L}^n f\|_\infty \leqslant \|\mathcal{L}^n \mathbf{1}\|_\infty \|f\|_\infty \leqslant K\|f\|_\infty$$

et l'inégalité de Lasota-Yorke s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{var}_\theta \mathcal{L}^n f &\leqslant C_1 \zeta^{\left[\frac{n}{q_0}\right]} \mathrm{var}_\theta(f) + C_2\|f\|_\nu \\ &\leqslant K\|f\|_\theta \end{aligned}$$

On a donc : $\|\mathcal{L}^n f\|_\theta \leqslant K\|f\|_\theta$ et :

$$\|\mathcal{L}^n\|_\theta \leqslant K$$

$$r(\mathcal{L}) \leqslant 1$$

D'autre part, en utilisant la conformalité de la mesure ν :

$$1 = \nu(\mathcal{L}^n \mathbf{1}) \leqslant \|\mathcal{L}^n \mathbf{1}\|_\infty \leqslant K\|\mathcal{L}^n \mathbf{1}\|_\theta \leqslant K\|\mathcal{L}^n\|_\theta \|\mathbf{1}\|_\theta = K\|\mathcal{L}^n\|_\theta$$

donc $r(\mathcal{L}) \geqslant 1$ ■

Lorsqu'on sait que l'opérateur est quasicompact, il suffit de connaître le rayon spectral pour avoir la convergence des moyennes de Cesaro de l'opérateur.
Définissons :

$$r_k = \lim_{n\to\infty}(\inf\{\|\mathcal{L}^n - K\|_\theta, K \ \ compact\ \})^{\frac{1}{n}}$$

Nussbaum a montré que, pour des opérateurs linéaires bornés :

$$r_{ess} = r_k$$

Le lemme (2) (page 709) de [DS] permet de montrer que tout élément λ de $\sigma(\mathcal{L})$ qui vérifie $|\lambda| > r_{ess}$ est isolé dans $\sigma(\mathcal{L})$ et le sous espace propre associé est de dimension finie. On déduit de ce fait une décomposition spectrale pour l'opérateur $\mathcal{L}$: pour tout $r > r_{ess}$, il existe un nombre fini s de valeurs propres λ_i avec $|\lambda_i| > r$ et

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(\Pi_i + N_i) + Q$$

avec $r(Q) \leqslant r$ (N_i est la partie nilpotente, Π_i la projection sur le sous espace propre de dimension finie).
On isole alors les valeurs propres de module 1 (qui existent sinon le rayon spectral de $\mathcal{L}$ serait strictement inférieur à 1) des autres. On a une décomposition du type :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(\Pi_i + N_i) + Q$$

avec $r(Q) < r(\mathcal{L})$ et $|\lambda_i| = r(\mathcal{L}) = 1$ ce qui correspond à la définition de quasi-compacité de [HH].

Lemme 17 *1 est valeur propre de l'opérateur $\mathcal{L}$. Sous une hypothèse de covering (hypothèse (f)), on peut lui associer une fonction propre strictement positive $h \in V_\theta$ et imposer $\nu(h) = 1$.*

Preuve : Pour la première partie de la preuve, on se base sur le point de vue de Henion et Hervé. On a une décomposition de $\mathcal{L}$ comme suit :

$$\mathcal{L} = (\Pi + N) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(\Pi_i + N_i) + Q$$

Π est la projection sur l'espace propre associé à 1 (qui peut être nulle si 1 n'est pas valeur propre) et N la partie nilpotente. Les λ_i sont des valeurs propres de module 1 différentes de 1.
Sous l'hypothèse $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathcal{L}^n \mathbf{1}\|_\theta < \infty$, $\mathcal{L}$ est un opérateur quasicompact de type diagonal, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de module un sont semi simples, on a :

$$\mathcal{L} = \Pi + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Pi_i + Q$$

$$\mathcal{L}^n = \Pi + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \Pi_i + Q^n$$
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{L}^j = \Pi + \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j \right) \Pi_i + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Q^j$$

Comme $r(Q) < 1$, la série $\sum_{j\geqslant 1} Q^j$ est convergente et donc :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Q^j = 0$$

Les λ_i étant des nombres complexes de module un différents de un, les suites

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j \right)_{n\geqslant 0}$$

sont bornées et donc :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j \right) \Pi_i = 0$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{L}^j = \Pi$$

Pour montrer que 1 est valeur propre, il suffit de prouver que $\Pi \neq 0$. Nous allons utiliser la mesure conforme ν. La convergence précédente nous permet en particulier d'affirmer que :

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{L}^j \mathbf{1} - \Pi\mathbf{1} \right\|_\theta = 0$$

De plus, pour tout n :

$$\nu \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{L}^j \mathbf{1} \right) = 1$$

On en déduit aisément :

$$\begin{aligned} |1 - \nu(\Pi\mathbf{1})| &= \left| \nu \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{L}^j \mathbf{1} \right) - \nu(\Pi\mathbf{1}) \right| \\ &\leqslant \nu \left(\left| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{L}^j \mathbf{1} - \Pi\mathbf{1} \right| \right) \\ &\leqslant \left\| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{L}^j \mathbf{1} - \Pi\mathbf{1} \right\|_\theta \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\nu(\Pi\mathbf{1}) = 1$ et $\Pi\mathbf{1} \neq 0$.
$h = \Pi\mathbf{1}$ est une fonction positive (comme limite de fonctions positives) non nulle, invariante par $\mathcal{L}$ et élément de V_θ.

On montre maintenant que $\overline{\inf}_Y h > 0$.
Supposons que : $\forall n, \forall P \in \mathcal{P}_n, \overline{\inf}_P h = 0$.
D'une part, si $x \in (\cap_n T^n\mathcal{P}_n)^c = \cup_n (T^n\mathcal{P}_n)^c$ alors il existe n_0 tel que $x \in (T^{n_0}\mathcal{P}_{n_0})^c$ et :

$$h(x) = \mathcal{L}^{n_0}h(x) = \frac{1}{\lambda^{n_0}} \sum_{P\in\mathcal{P}_{n_0}} (g_{n_0}h) \circ T_P^{-n_0}(x)\mathbf{1}_{T^{n_0}P}(x) = 0 \quad \nu\text{-p.p}$$

D'autre part, si $x \in \cap_n T^n\mathcal{P}_n$, alors pour tout n et ν presque tout x on utilise

$$h \circ T_P^{-n}(x) \leqslant \overline{\mathrm{osc}}(h, P) + \overline{\inf}_P h$$

pour obtenir l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} h(x) = \mathcal{L}^n h(x) &= \frac{1}{\lambda^n} \sum_{P\in\mathcal{P}_n} (g_n h) \circ T_P^{-n}(x)\mathbf{1}_{T^nP}(x) \\ &\leqslant (\mathcal{L}^n\mathbf{1}(x))(\max_{P\in\mathcal{P}_n} \overline{\inf}_P h) + \frac{1}{\lambda^n} \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_P g_n \overline{\mathrm{osc}}(h, P) \\ &\leqslant \frac{1}{(\theta\lambda)^n}\mathrm{var}_\theta h \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, compte tenu de l'hypothèse **(H2)**, on déduit $h(x) = 0$ pour ν presque tout x ce qui contredit le fait que c'est une fonction propre. Par conséquent, il existe n_0 et $P_0 \in \mathcal{P}^{n_0}$ tels que $\overline{\inf}_{P_0} h \geqslant C > 0$.
Ceci signifie qu'il existe $M > 0$ et $P_0' \subset P_0$, $P_0'' \subset P_0$ tels que $\nu(P_0') = 0$, $\nu(P_0'') = \nu(P_0)$ et :

$$\forall x \in P_0'' : h(x) \geqslant M > 0$$

Exprimons l'hypothèse de covering :

$$\exists N_0, T^{N_0}(P_0 \setminus \partial\mathcal{P}_{N_0}) \supset Y$$

On peut choisir $N_0 > n_0$. On a $T^{N_0}(P_0) \subset T^{N_0}(P_0') \cup T^{N_0}(P_0'')$. De plus :

$$\nu(T^{N_0}(P_0')) = \frac{1}{\lambda^{N_0}} \int_{P_0'} \frac{1}{g_{N_0}} d\nu \leqslant \frac{1}{\lambda^{N_0} \inf g_{N_0}} \nu(P_0') = 0$$

On peut en déduire :

$$1 = \nu(Y) \leqslant \nu(T^{N_0}(P_0 \setminus \partial\mathcal{P}_{N_0})) \leqslant \nu(T^{N_0}(P_0'' \setminus \partial\mathcal{P}_{N_0}))$$

Par conséquent $\nu(T^{N_0}P_0'') = 1$.
De plus, si $x \in T^{N_0}P_0''$, il existe $y \in P_0''$ tel que $T^{N_0}(y) = x$ et :

$$\begin{aligned} h(x) = \mathcal{L}^{N_0}h(x) &= \frac{1}{\lambda^{N_0}} \sum_{P \in \mathcal{P}^{N_0}} (g_{N_0}h) \circ T_P^{-N_0}(x) \mathbf{1}_{T^{N_0}P}(x) \\ &\geqslant \frac{1}{\lambda^{N_0}} g_{N_0}(y)h(y) \\ &\geqslant \frac{1}{\lambda^{N_0}} \inf g_{N_0} M > 0 \end{aligned}$$

h est strictement positive sur un ensemble de mesure pleine ce qui prouve que son infimum essentiel est strictement positif. ■

Remarque 7 *Outre l'existence, on a en fait montré que si k est une fonction propre positive associée à 1, elle est strictement positive. De plus, si k est une fonction propre associée à 1, k^+ (partie positive) et k^- (partie négative) le sont aussi, en effet : $\mathcal{L}$ est un opérateur positif donc $\mathcal{L}k^+ \geqslant k^+$ et $\mathcal{L}k^- \geqslant k^-$, on utilise alors la mesure conforme ν pour écrire :*

$$\nu(\mathcal{L}k^+ - k^+) = \nu(\mathcal{L}k^+) - \nu(k^+) = 0$$

$$\nu(\mathcal{L}k^- - k^-) = \nu(\mathcal{L}k^-) - \nu(k^-) = 0$$

D'où $\mathcal{L}k^+ = k^+$ et $\mathcal{L}k^- = k^-$. Par conséquent, k^+ et k^- sont strictement positives. Ceci n'est possible que si l'une des deux fonctions est nulle. On peut donc affirmer que si k est une fonction propre associée à 1, elle est soit strictement positive, soit strictement négative.

Lemme 18 *1 est valeur propre simple pour $\mathcal{L}$*

Preuve : Soit k densité invariante. D'après la remarque précédente, on peut la choisir strictement positive.
h et $\frac{1}{\nu(k)}k$ sont deux fonctions invariantes strictement positives d'intégrale un.
$h - \frac{1}{\nu(k)}k$ est invariante donc soit strictement positive, soit strictement négative et elle est d'intégrale nulle donc :

$$k = \nu(k)h$$

et l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. ■

Pour avoir la convergence des itérés de l'opérateur vers un projecteur de rang un, il est nécessaire d'étudier les autres valeurs propres de module un. Dans la suite, nous supposerons que la seule valeur propre de module un est 1.

On a alors la décomposition suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}^n = \Pi + Q^n$$

avec, pour tout $f \in L^1_\nu$, $\Pi(f) = \nu(f)\Pi\mathbf{1} = \nu(f)h$.

Proposition 5 *Il existe $\xi < 1$ tel que pour toutes fonctions $f \in V_\theta$ et $g \in L^1_\nu$:*

$$\left| \int fg \circ T^n \, d\mu - \int f \, d\mu \int g \, d\mu \right| \leqslant C\xi^n \|f\|_\theta \|g\|_\nu$$

Preuve : De manière classique, on peut écrire les corrélations de la façon suivante pour $f \in V_\theta$ et $g \in L^1_\nu$:

$$\begin{aligned}
\left| \int fg \circ T^n \, d\mu - \int f \, d\mu \int g \, d\mu \right| &= \left| \int \mathcal{L}^n(fh) g d\nu - \int \left(\int fh d\nu \right) gh d\nu \right| \\
&\leqslant \left\| \mathcal{L}^n(fh) - \left(\int fh d\nu \right) h \right\|_\theta \int |g| d\nu \\
&\leqslant \|Q^n(fh)\|_\theta \int |g| d\nu \\
&\leqslant \xi^n \|h\|_\theta \|f\|_\theta \int |g| d\nu \\
&\leqslant C\xi^n \|f\|_\theta \|g\|_\nu
\end{aligned}$$

■

Proposition 6 *$\mu = h\nu$ est un état d'équilibre.*

Preuve : Rappelons tout d'abord que le principe variationnel est valide (voir la proposition 2), c'est-à dire :

$$P_\varphi(\mu, T) = \sup_{m \in M(X,T)} \left(h_m(T) + \int \varphi dm \right)$$

Il reste donc à montrer :

$$P_{\text{top}}(X, T) = P_\varphi(\mu, T)$$

Rappelons que la densité invariante h est strictement positive, cela va nous permettre de renormaliser l'opérateur de transfert : soit $\mathbb{R}$ l'opérateur défini de la manière suivante :

$$\mathcal{R}f = \frac{1}{h}\mathcal{L}(fh)$$

Comme par hypothèse, la partition $\mathcal{P}$ est génératrice, $\mathcal{P}_\infty$ est la partition en points.

Nous allons commencer par montrer que :

$$\mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_P | T^{-1}\mathcal{P}_\infty) = \mathcal{R}(\mathbf{1}_P) \circ T$$

Pour cela il suffit de montrer que l'égalité est vraie en intégrant sur n'importe quel mesurable B par rapport à la tribu $T^{-1}\mathcal{P}_\infty$. Soit donc $B = T^{-1}B'$ avec B' $\mathcal{P}_\infty$-mesurable c'est à dire tout simplement mesurable :

$$\begin{aligned}
\int_B \mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_P | T^{-1}\mathcal{P}_\infty) d\mu &= \int_{T^{-1}B'} \mathbf{1}_P d\mu = \int \mathbf{1}_P \mathbf{1}_{B'} \circ T d\mu = \int \mathcal{R}(\mathbf{1}_P)\mathbf{1}_{B'} d\mu \\
&= \int \mathcal{R}(\mathbf{1}_P) \circ T \mathbf{1}_{B'} \circ T \ d\mu \ \ \text{(par invariance de } \mu\text{)} \\
&= \int_B \mathcal{R}(\mathbf{1}_P) \circ T \ d\mu
\end{aligned}$$

D'autre part, par définition de $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{R}(\mathbf{1}_P) \circ T = \frac{1}{h \circ T} \mathcal{L}(\mathbf{1}_P h) \circ T$$

et, en développant l'expression de l'opérateur de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbf{1}_P h) \circ T(x) &= \frac{1}{\lambda} \sum_{Q \in \mathcal{P}} \mathbf{1}_{TQ}(Tx) g \circ T_Q^{-1}(Tx) h \circ T_Q^{-1}(Tx) \mathbf{1}_P \circ T_Q^{-1}(Tx) \\
&= \frac{1}{\lambda} \mathbf{1}_{TP}(Tx) g \circ T_P^{-1}(Tx) h \circ T_P^{-1}(Tx) \mathbf{1}_P \circ T_P^{-1}(Tx) \\
&= \frac{1}{\lambda} g(x) h(x)
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{R}(\mathbf{1}_P) \circ T(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{g(x)h(x)}{h \circ T(x)}$$

et, toujours en utilisant le fait que $\mathcal{P}$ est génératrice :

$$\begin{aligned}
h_\mu(T) &= h_\mu(T, \mathcal{P}) = H(\mathcal{P}/T^{-1}\mathcal{P}_\infty) \\
&= -\int \sum_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{1}_P(x) \log \mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_P | T^{-1}\mathcal{P}_\infty)(x) d\mu(x) \\
&= -\int \sum_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{1}_P(x) \log \mathcal{R}(\mathbf{1}_P) \circ T(x) d\mu(x) \\
&= -\int \sum_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{1}_P(x) \log \frac{1}{\lambda} \frac{g(x)h(x)}{h \circ T(x)} d\mu(x) \\
&= -\int \sum_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{1}_P(x)(-\log \lambda + \log g(x) + \log h(x) - \log(h \circ T)(x)) d\mu(x) \\
&= \log \lambda - \int \varphi d\mu - \int (\log h(x) - \log h \circ T(x)) d\mu(x) \\
&= \log \lambda - \int \varphi d\mu
\end{aligned}$$

La dernière égalité provenant de l'invariance de la mesure par T, puisque $\log h$ est intégrable.
On en déduit l'égalité :

$$P_\varphi(\mu, T) = h_\mu(T) + \int \varphi d\mu = \log \lambda = P_{\text{top}}(X, T)$$

■

II.6 Vérification des hypothèses en dimension un

Rappelons la condition à vérifier. Soit

$$S(q) = \sum_n \theta^n \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_n \\ \bar{P} \cap \partial T^q \mathcal{P}_q \neq \emptyset}} \sup_P g_n$$

La condition est la suivante (c'est l'hypothèse (g)) :

$$\lim_{q \to \infty} \frac{1}{q} \log S(q) < \log(\theta\lambda)$$

On a l'inclusion suivante :

$$\partial T^q \mathcal{P}_q \subset \partial T\mathcal{P} \cup \partial T^2 \mathcal{P} \cup \ldots \cup \partial T^q \mathcal{P}$$

En dimension un, pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, $\partial T^i \mathcal{P}$ est constitué d'au plus $2\#\mathcal{P}$ points. Par conséquent , le nombre de cylindres $P \in \mathcal{P}_n$ tels que $\bar{P} \cap \partial T^q \mathcal{P}_q \neq \emptyset$ est au plus égal à $2\#\mathcal{P}$ et :

$$\sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_n \\ \bar{P} \cap \partial T^q \mathcal{P}_q \neq \emptyset}} \sup_P g_n \leqslant 2q\#\mathcal{P} \sup g_n$$

Si maintenant on fait l'hypothèse $\sup \varphi < P_{\text{top}}(X, T)$, on peut choisir θ tel que $\theta \sup g < 1$.
La série $\sum \theta^n \sup g_n$ converge et :

$$S(q) \leqslant 2q\#\mathcal{P} \sum_n \theta^n \sup g_n$$

On en déduit $\lim_{q\to\infty}\frac{1}{q}\log S(q)=0$ et la condition est vérifiée puisque $\theta\lambda>1$
Remarquons que :

$$\sup\varphi < P_{\mathrm{top}}(X,T) \quad\Longrightarrow\quad P_{\mathrm{top}}(\partial\mathcal{P}) < P_{\mathrm{top}}(X,T)$$

En effet, en dimension un, le bord $\partial\mathcal{P}$ est constitué de $2\#\mathcal{P}$ points et :

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{top}}(\partial\mathcal{P}) &\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\#\{P\in\mathcal{P}_n, \bar{P}\cap\partial\mathcal{P}\neq\emptyset\}\sup g_n \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log 2\#\mathcal{P}\sup g_n \\ &\leqslant \sup\varphi \end{aligned}$$

Chapitre III
Temps De Retour

III.1 Introduction

Cette dernière partie est dédiée à l'étude des fluctuations dans le théorème d'Ornstein-Weiss, c'est-à-dire des fluctuations des temps de retour dans un n-cylindre autour de l'entropie.
C'est une généralisation des mêmes résultats obtenus en dimension un , exposés dans un article à paraître aux Annales de l'I.H.P, section probabilités. Nous montrons tout d'abord que l'on peut approcher la loi du temps d'entrée dans un n-cylindre par une loi exponentielle et nous donnons l'erreur dans l'approximation (qui est exponentielle). En exprimant ensuite la loi du temps de retour dans un n-cylindre commme une somme de lois de temps d'entrée pondérée par la mesure des cylindres, on prouve que les fluctuations des temps de retour autour de l'entropie sont lognormales.
Ces résultats sont basés sur deux propriétés des états d'équilibre pour des systèmes inversibles par morceaux : tout d'abord, l'α-mélange, déduit de la décroissance des corrélations (voir chapitre précédent), ensuite le caractère "presque Gibbs" de la mesure invariante (discutée dans le paragraphe 2), c'est-à-dire que la mesure de presque tous les n-cylindres est donnée par la valeur du potentiel sur une orbite typique issue d'un point de ce cylindre.
Soit

$$C_n(\varphi) = \int \varphi \circ T^n \varphi \; d\mu - \left(\int \varphi \; d\mu \right)^2$$

et

$$\sigma^2(\varphi) = C_0(\varphi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\varphi)$$

Il est à noter que la série converge car le mélange est exponentiel.

Théorème 3 *Supposons $\sigma(\varphi) \neq 0$, alors $\left(\frac{\log R_n - nh}{\sigma(\varphi)\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires bien définies sur l'espace de probabilité $([0,1], \mathcal{B}, \mu)$ et :*

$$\frac{\log R_n - nh}{\sigma(\varphi)\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

où $\Rightarrow$ est une convergence en loi.
(et $\sigma(\varphi) = 0$ si et seulement si il existe une fonction mesurable $\bar{\varphi}$ telle que $\varphi = \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \circ T$).

III.2 Rappels

Inégalité de Lasota-Yorke : Quitte à considérer un itéré de l'opérateur, on utilisera l'inégalité de Lasota-Yorke sous la forme suivante :

Proposition 7 *Il existe $\zeta < 1$, $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que pout tout $f \in V_\theta,\ f \geqslant 0$, pour tout $q \geqslant 0$:*

$$var_\theta(\mathcal{L}^q(f)) \leqslant C_1 \zeta^q \ var_\theta(f) + C_2 \|f\|_\nu$$

Type de mélange : Rappelons l'inégalité de décroissance des corrélations obtenue au chapitre précédent, si $f \in V_\theta$ et $g \in L^1_\nu$:

$$\left| \int fg \circ T^n \ d\mu - \int f \ d\mu \int g \ d\mu \right| \leqslant C\xi^n \|f\|_\theta \|g\|_\nu$$

Appliquons cette inégalité à des indicatrices $\mathbf{1}_P$ avec $P \in \mathcal{P}_p$ et $\mathbf{1}_Q$ avec Q ensemble quelconque :

$$\begin{aligned} |\mu(P \cap T^{-n}Q) - \mu(P)\mu(Q)| &\leqslant C\xi^n \|\mathbf{1}_P\|_\theta \nu(Q) \\ &\leqslant K\xi^n \|\mathbf{1}_P\|_\theta \mu(Q) \end{aligned}$$

$\|\mathbf{1}_P\|_\theta = \mathrm{var}_\theta \mathbf{1}_P + \|\mathbf{1}_P\|_\infty$. Reprenant la remarque 4, on a :

$$\mathrm{var}_\theta \mathbf{1}_P \leqslant \sum_{k=0}^{p} \theta^k \sup g_k \leqslant \sum_{k=0}^{p} (\theta \exp(\sup \varphi))^k$$

Faisons une hypothèse supplémentaire, classique en dimension un [LSV] :

$$\sup \varphi < P_{\mathrm{top}}(X)$$

Alors, dans le chapitre précédent, restreindre le choix de θ en prenant :

$$1 < \theta' < \min\left(\frac{1}{\alpha}, \exp(P_{\mathrm{top}}(X) - P_{\mathrm{top}}(\partial\mathcal{P})), \exp(P_{\mathrm{top}}(X) - \sup\varphi)\right)$$

et $\theta = \frac{1}{\lambda}\theta'$ ne modifie rien aux résultats obtenus sur la quasicompacité de l'opérateur et la décroissance exponentielle des corrélations. Avec ce choix, on a $\theta\exp(\sup\varphi) < 1$ et la série apparaissant dans $\mathrm{var}_\theta \mathbf{1}_P$ est convergente. On a donc :

$$\mathrm{var}_\theta \mathbf{1}_P \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\exp(\sup\varphi))^k$$

On obtient ainsi de l'alpha mélange :

$$|\mu(P \cap T^{-n}Q) - \mu(P)\mu(Q)| \leqslant C\xi^n \mu(Q) \tag{21}$$

Théorème de la limite centrale : Pour les fonctions dont la décroissance des corrélations est sommable (ce qui est le cas pour $\varphi_0 = \mu(\varphi) - \varphi$ puisqu'elle est à variation bornée et donc la décroissance des corrélations est exponentielle) , le théorème de la limite centrale est vrai ([L]), rappelons que :

$$\sigma^2(f) = C_0(f) + 2\sum_{n=1}^{\infty} C_n(f)$$

et supposons que $\sigma(\varphi) \neq 0$, alors on a :

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_0 \circ T^i}{\sigma(\varphi_0)\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

ce qui est équivalent à :

$$\frac{-\log\ g_n + n\mu(\varphi)}{\sigma(\varphi)\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

(et $\sigma(\varphi) = 0$ si et seulement si il existe une fonction mesurable $\bar{\varphi}$ telle que $\varphi = \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \circ T$)

Propriété de distorsion bornée :

Lemme 19 *Il existe une constante c>1 telle que, pour tout n, tout P$\in \mathcal{P}_n$, et tout $x, y \in P$:*

$$\frac{1}{c} \leqslant \frac{g_n(y)}{g_n(x)} \leqslant c$$

Preuve : Dans la preuve du lemme 9 (pour q=1), on a montré que si $x, y \in P \in \mathcal{P}_n$:

$$\begin{aligned} |g_n(y) - g_n(x)| &\leqslant Kg_n(y) \\ \left|\frac{g_n(y)}{g_n(x)} - 1\right| &\leqslant K \end{aligned}$$

on a l'inégalité avec

$$c = \max\left(1 + K, \frac{1}{1-K}\right).$$

■

Remarque 8 *Dans le cas où e^{φ} est l'inverse du jacobien de la transformation T, la propriété de distorsion bornée vient du fait que T est de classe $\mathcal{C}^2$ et de l'hypothèse de dilatation uniforme faite sur T (voir [C]).*

III.3 Décroissance exponentielle de la mesure des cylindres

Dans la suite, K et β sont des constantes génériques indépendantes de n et des cylindres. On prouve dans ce paragraphe, que, d'une part, la mesure des n-cylindres décroît exponentiellement vers zero, d'autre part, pour la plupart de ces n-cylindres, on peut donner un équivalent de la mesure.

Lemme 20 *Il existe $\kappa > 0$ et une constante C telle que, pour tout n et tout n-cylindre P :*

$$\mu(P) \leqslant Ce^{-\kappa n}$$

Preuve : Soit $P = [P_{i_1} \dots P_{i_n}]$ un n-cylindre. Pour tout $n_0 < n$ on a :

$$\mu(P) \leqslant \mu(P_{i_1} \cap T^{-n_0} P_{i_{n_0}} \cap \dots \cap T^{-\left[\frac{n}{n_0}\right]n_0} P_{i_{\left[\frac{n}{n_0}\right]n_0}})$$

Utilisons l'inégalité de mélange avec le 1-cylindre P_{i_1} et l'ensemble mesurable $P_{i_{n_0}} \cap \dots \cap T^{-(\left[\frac{n}{n_0}\right]-1)n_0} P_{i_{\left[\frac{n}{n_0}\right]n_0}}$:

$$\begin{aligned} \mu(P_{i_1} \cap \dots \cap \ & T^{-\left[\frac{n}{n_0}\right]n_0} P_{i_{\left[\frac{n}{n_0}\right]n_0}}) - \mu(P_{i_1})\mu(P_{i_{n_0}} \cap \dots \cap T^{-(\left[\frac{n}{n_0}\right]-1)n_0} P_{i_{\left[\frac{n}{n_0}\right]n_0}}) \\ &\leqslant C\xi^{n_0} \mu(P_{i_{n_0}} \cap \dots \cap T^{-(\left[\frac{n}{n_0}\right]-1)n_0} P_{i_{\left[\frac{n}{n_0}\right]n_0}}) \end{aligned}$$

si on note $s = \sup_{P\in\mathcal{P}} \mu(P)$ (il est à noter que $s < 1$) on a :

$$\mu(P) \leqslant (s + K\xi^{n_0})\mu(P_{i_{n_0}} \cap \ldots \cap T^{-(\left[\frac{n}{n_0}\right]-1)n_0} P_{i_{\left[\frac{n}{n_0}\right]n_0}})$$

et, de proche en proche :

$$\mu(P) \leqslant (s + K\xi^{n_0})^{\left[\frac{n}{n_0}\right]+1}$$

De plus, il existe n_0 tel que $s + K\xi^{n_0} < 1$ ce qui termine la preuve. ■

Le lemme suivant donne un équivalent de la mesure de presque tout n-cylindre. On ne peut pas avoir l'équivalent pour tous les n-cylindres à cause de la remarque suivante :

Remarque 9 *Soit $P \in \mathcal{P}_n$ un n-cylindre dont le bord ne rencontre pas $\partial\mathcal{P}$, alors $T(P)$ est un (n-1)-cylindre. (Quand le système est markovien, l'image d'un n-cylindre est toujours un (n-1)-cylindre, c'est pourquoi on a l'équivalent pour tous les cylindres). A l'inverse, si le bord de P rencontre $\partial\mathcal{P}$, alors $T(P)$ peut être strictement inclus dans le (n-1)-cylindre qui le contient.*

Preuve de la remarque :
Soit P un n-cylindre, son bord est inclus dans :

$$\partial\mathcal{P}_n = \cup_{i=0}^{n-1} T^{-i}\partial\mathcal{P}$$

Si on suppose que $\bar{P} \cap \partial\mathcal{P} = \emptyset$, alors son bord est inclus dans $\cup_{i=1}^{n-1} T^{-i}\partial\mathcal{P}$ et le bord de $T(P)$ est inclus dans $\cup_{i=0}^{n-2} T^{-i}\partial\mathcal{P} = \partial\mathcal{P}_{n-1}$. $T(P)$est donc une union de (n-1)-cylindres et par un argument de connexité, $T(P)$ est un (n-1)-cylindre.

Exemple : β-transformation multidimensionnelle.(figure 1)
C'est une application affine par morceaux de $[0,1]^2$ dans $[0,1]^2$.
La figure représente les partitions d'inversibilité de T, T^2 et T^3 où :

$$T(x,y) = (\frac{\pi}{2}x \mod 1, \frac{\pi}{2}y \mod 1)$$

Le cylindre $[2,3,2]$ est un cylindre non markovien puisque son image par T, qui est grisée sur la figure, est strictement incluse dans le 2-cylindre $[3,2]$.

Lemme 21 *Soit $k_0 > 0$ et $n > k_0$. Soit $P \in \mathcal{P}_n$ tel que, pour tout $k \leqslant n - k_0$, $\partial T^k(P) \cap \partial\mathcal{P} = \emptyset$. Alors, il existe une constante $c(k_0) > 1$ telle que, pour tout x élément de P :*

$$\frac{1}{c(k_0)} \leqslant \frac{\mu(P)}{\lambda^{-n} g_n(x)} \leqslant c(k_0).$$

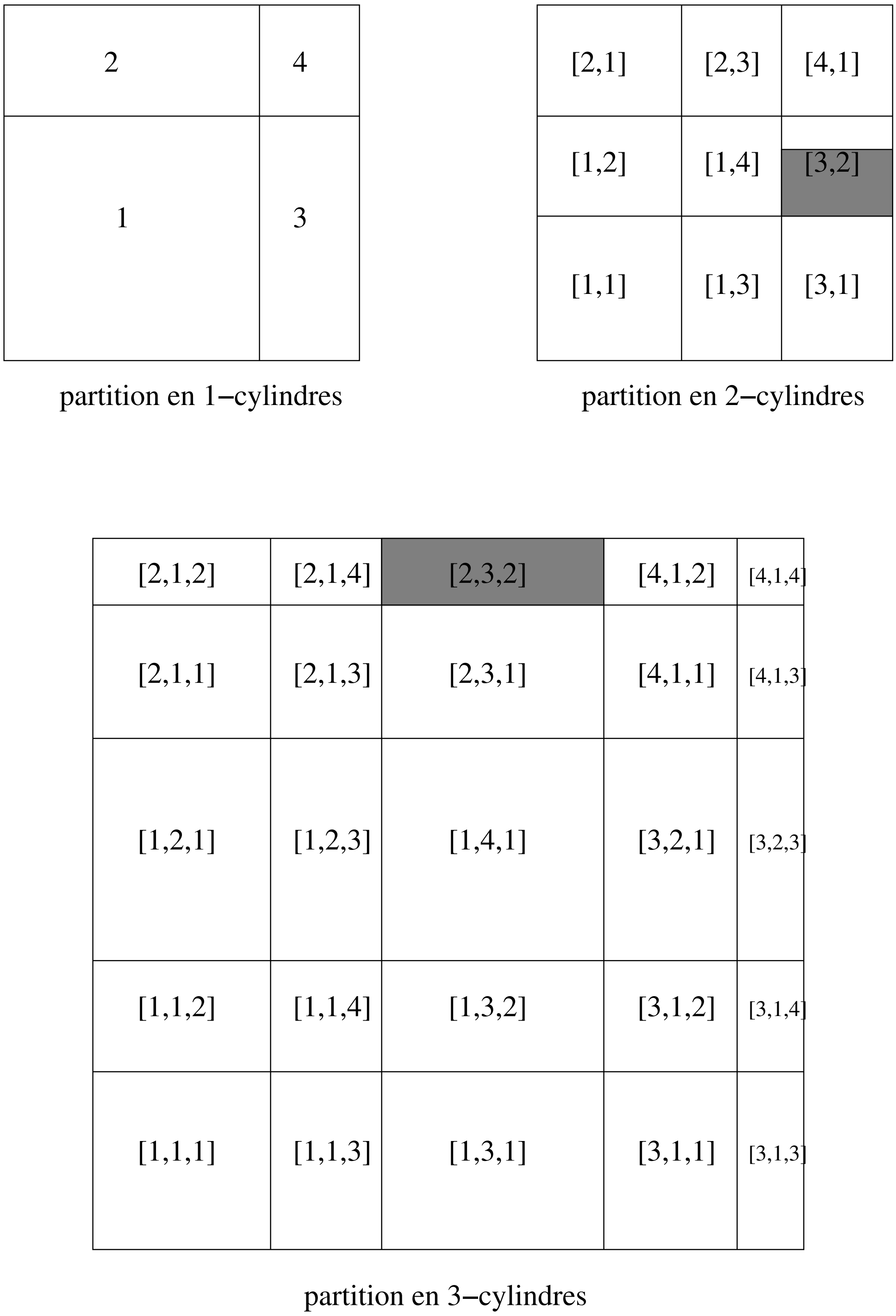

Fig. 2 – Application non markovienne

Preuve : Soit $P \in \mathcal{P}_n$ tel que, pour tout $k \leqslant n - k_0$, $\partial T^k(P) \cap \partial \mathcal{P} = \emptyset$ et soit $x \in P$:

$$\mu(P) = \nu(h\mathbf{1}_P) = \frac{1}{\lambda^{n-k_0}}\nu(L^{n-k_0}(h\mathbf{1}_P)).$$

$$L^{n-k_0}(h\mathbf{1}_P)(z) = \sum_{\substack{y\in P\\ T^{n-k_0}(y)=z}} g_{n-k_0}(y)h(y). \tag{22}$$

Prenons $z \in X \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}}\partial\mathcal{P}_n$ (on peut se restreindre à de tels z sans changer la valeur de l'intégrale $\nu(L^{n-k_0}(h\mathbf{1}_P))$ puisque $\nu(\partial\mathcal{P}_n) = 0$ pour tout n) ; z est dans un k_0-cylindre $\mathcal{P}_{k_0}(z)$. $T^{-n+k_0}(\mathcal{P}_{k_0}(z))$ est constitué d'un certain nombre de n-cylindres dont chacun contient un élément de $T^{-n+k_0}(z)$.
Si P est l'un de ces n-cylindres alors $P \cap T^{-n+k_0}(z) = z_P$, si ce n'est pas le cas alors $P \cap T^{-n+k_0}(z) = \emptyset$. Quoiqu'il en soit :

$$L^{n-k_0}(h\mathbf{1}_P)(z) \leqslant g_{n-k_0}(z_P)h(z_P) \leqslant \|h\|_\infty g_{n-k_0}(z_P)$$

Soit $x \in P$, on utilise la propriété de distorsion bornée (puisque x et z_P sont dans le même $n - k_0$-cylindre) :

$$L^{n-k_0}(h\mathbf{1}_P)(z) \leqslant K g_{n-k_0}(x)$$

$$\frac{\mu(P)}{\lambda^{-n+k_0}g_{n-k_0}(x)} \leqslant K$$

De plus, d'après la remarque précédente $T^{n-k_0}(P)$ est un k_0-cylindre et la somme (22) n'est pas nulle lorsque $T^{-n+k_0}(z) \cap P \neq \emptyset$ ce qui a lieu quand $T^{n-k_0}(P) = \mathcal{P}_{k_0}(z)$ d'où :

$$\begin{aligned} L^{n-k_0}(h\mathbf{1}_P)(z) &= \mathbf{1}_{T^{n-k_0}(P)}(z) \sum_{\substack{T^{n-k_0}(y)=z\\ y\in P}} g_{n-k_0}(y)h(y) \\ &\geqslant \mathbf{1}_{T^{n-k_0}(P)}(z) g_{n-k_0}(z_P)h(z_P) \\ &\geqslant \frac{1}{c}\mathbf{1}_{T^{n-k_0}(P)}(z) g_{n-k_0}(x)h(z_P) \end{aligned}$$

on a alors :

$$\mu(P) \geqslant \frac{\lambda^{-n+k_0}}{c}\nu(T^{n-k_0}(P))g_{n-k_0}(x)\overline{\inf}(h)$$

et $T^{n-k_0}(P)$ est un k_0-cylindre ; notons maintenant $c(k_0) = (\frac{1}{c}\min_{P\in\mathcal{P}_{k_0}} \nu(P) \times \overline{\inf}(h))^{-1}$:

$$\frac{\mu(P)}{\lambda^{-n+k_0}g_{n-k_0}(x)} \geqslant \frac{1}{c(k_0)}.$$

et $g_n(x) = g_{n-k_0}(x)g_{k_0}(T^{n-k_0}(x))$. Mais g_{k_0} est borné et en multipliant par λ^{k_0} on obtient le résultat. ■

Lemme 22 *Soit* $B(n,C) = \{P \in \mathcal{P}_n, \forall x \in P : \frac{1}{C} \leqslant \frac{\mu(P)}{\lambda^{-n} g_n(x)} \leqslant C\}$*. Il existe* K *tel que, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $D(\varepsilon)$ *et* N_ε *tels que, pour* $n > N_\varepsilon$ *:*

$$\mu(\bigcup_{P \in B(n,D(\varepsilon))} P) \geqslant 1 - K\varepsilon$$

Preuve : Soit $n > 0$ et $k_0 < n$. D'après le lemme précédent, si $P \in \mathcal{P}_n$ et si, pour tout $k \leqslant n - k_0$, $\partial T^k(P) \cap \partial\mathcal{P} = \emptyset$ alors $P \in B(n, c(k_0))$. Montrons que n et k_0 peuvent être choisis de manière à ce que cet ensemble ait une mesure proche de un. Considérons son complémentaire :

$$F(n,k_0) = \{P \in \mathcal{P}_n, \exists k \leqslant n - k_0, \partial T^k(P) \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset\}$$

En fait, dans cette définition, on peut supposer que k est le premier entier avec cette propriété. Alors, $T^k(P)$ est exactement un $(n-k)-$cylindre et :

$$T^k(P) \in \{B \in \mathcal{P}_{n-k}, \bar{B} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset\}$$

En changeant un peu les notations, on peut encore écrire :

$$\bigcup_{P \in F(n,k_0)} P \subset \bigcup_{k=k_0}^{n} T^{k-n}(\cup\{B \in \mathcal{P}_k, \bar{B} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset\})$$

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{P \in F(n,k_0)} P\right) &\leqslant \sum_{k=k_0}^{n} \mu(T^{k-n}(\cup\{B \in \mathcal{P}_k, \bar{B} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset\})) \\
&\leqslant \sum_{k=k_0}^{n} \mu(\cup\{B \in \mathcal{P}_k, \bar{B} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset\})
\end{aligned}$$

Mais on a :

$$\nu(\cup\{B \in \mathcal{P}_k, \bar{B} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset\}) \leqslant \frac{1}{\lambda^k} \sum_{\substack{B \in \mathcal{P}_k \\ \bar{B} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset}} \sup g_k$$

Rappelons que :

$$P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_n \\ \bar{P} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset}} \sup_P g_n$$

D'après l'hypothèse principale, il existe δ tel que

$$P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}) + \delta < P_{\text{top}}(X,T).$$

Pour ce δ, il existe k_1 tel que, pour $k > k_1$:

$$\frac{1}{k} \log \sum_{\substack{B \in \mathcal{P}_k \\ \bar{B} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset}} \sup_B g_k \leqslant P_{\text{top}}(\partial\mathcal{P}) + \delta < P_{\text{top}}(X,T)$$

et :

$$\nu\{B \in \mathcal{P}_k, \bar{B} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset\} \leqslant \rho^k$$

avec $\rho = \frac{\lambda_\partial e^\delta}{\lambda} < 1$. Puisque la densité h est élément de V_θ et donc bornée :

$$\mu\{B \in \mathcal{P}_k, \bar{B} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset\} \leqslant K\rho^k$$

On termine la preuve comme suit :
Soit $\varepsilon > 0$, Il existe $k_0(\varepsilon)$ (que l'on peut choisir plus grand que k_1) tel que, pour tout $k > k_0(\varepsilon)$: $\rho^k \leqslant \frac{\varepsilon}{k^2}$. On a pour tout $n > k_0(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{P \in F(n,k_0(\varepsilon))} P\right) &\leqslant K \sum_{k=k_0(\varepsilon)}^{n} \rho^k \\ &\leqslant K \sum_{k=k_0(\varepsilon)}^{n} \frac{\varepsilon}{k^2} \\ &\leqslant K\varepsilon \end{aligned}$$

et on a le résultat avec $D(\varepsilon) = c(k_0(\varepsilon))$. ■

Lemme 23 *On a le même résultat pour la mesure conforme ν.*

Preuve : C'est la même démonstration que dans le lemme précédent jusqu'à :

$$\bigcup_{P \in F(n,k_0)} P \subset \bigcup_{k=k_0}^{n} T^{k-n}\{B \in \mathcal{P}_k, \bar{B} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset\}$$

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{P \in F(n,k_0)} P\right) &\leqslant \sum_{k=k_0}^{n} \nu(T^{k-n}\{B \in \mathcal{P}_k, \bar{B} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset\}) \\ &\leqslant \sum_{k=k_0}^{n} \int \mathbf{1}_{\{B \in \mathcal{P}_k, \bar{B} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset\}} \circ T^{n-k} d\nu \\ &\leqslant \sum_{k=k_0}^{n} \int \mathcal{L}^{n-k}\mathbf{1}\mathbf{1}_{\{B \in \mathcal{P}_k, \bar{B} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset\}} d\nu \\ &\leqslant \sup_{k \in [k_0,..,n]} \sup_{Y} \mathcal{L}^{n-k}\mathbf{1} \sum_{k=k_0}^{n} \nu(B \in \mathcal{P}_k, \bar{B} \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset) \\ &\leqslant \sup_{n} \sup_{Y} \mathcal{L}^{n}\mathbf{1} \sum_{k=k_0(\varepsilon)}^{n} \rho^K \leqslant K\varepsilon \end{aligned}$$

■

III.4 Temps de retour et temps d'entrée.

Dans cette partie, on montre que, en un certain sens, la loi asymptotique de R_n peut être écrite comme une somme de lois de temps d'entrée avec des fluctuations (les taux de fluctuation sont la masse de ces cylindres).

Définition 3 *Un n-cylidre P est dit k-récurrent (pour $n > k$) si*

$$\forall\ 0 < l < k-1, P \cap T^{-l}(P) = \emptyset \text{ et } P \cap T^{-k+1}(P) \neq \emptyset$$

E_k est l'ensemble des cylindres k-récurrents et $E_{<k}$ l'ensemble des cylindres qui sont récurrents avant k.

Propriété 1 *Si $k < n$:*

$$\#(E_k) \leqslant (\#\mathcal{P})^{k-1} \quad et \quad \#(E_{<k}) \leqslant (\#\mathcal{P})^k$$

Preuve de la propriété :
si $P = [P_{i_1} \dots P_{i_n}] \in E_k$, il existe x dans P tel que $T^{k-1}(x)$ est dans P.

$$x \in P \text{ et donc } x \in P_{i_1}, T(x) \in P_{i_2}, \dots, T^{n-1}(x) \in P_{i_n}$$

$$T^{k-1}(x) \in P \text{ et donc } T^{k-1}(x) \in P_{i_1}, \dots, T^{n+k-2}(x) \in P_{i_n}$$

D'où : $P_{i_k} = P_{i_1}, \dots, P_{i_n} = P_{i_{n-k+1}}$. Pour P, on a seulement le choix entre $P_{i_1}, \dots, P_{i_{k-1}}$ et $\#(E_k) \leqslant (\#\mathcal{P})^{k-1}$. Finalement

$$\#(E_{<k}) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \#(E_i) \leqslant (\#\mathcal{P})^k$$

Lemme 24 *Soit (t_n) une suite telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = +\infty$, alors :*

$$\lim_{n\to\infty} |\mu\{R_n > t_n\} - \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \mu(P)\mu\{\tau_P > t_n\}| = 0. \tag{23}$$

Preuve : Rappelons la définition de R_n :

$$R_n(x) = \inf\{k > 0, T^k(x) \in \mathcal{P}_n(x)\}.$$

Pour tout $t > 0$ on a :

$$\mu\{R_n > t\} = \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \mu\{P \cap (\tau_P > t)\}$$

Pour tout r avec $n < r < t$ on obtient :

$$\begin{aligned}
|\mu\{P \quad \cap \quad & (\tau_P > t)\} - \mu(P)\mu\{\tau_P > t\}| \\
\leqslant \quad & |\mu\{P \cap (\tau_P > t)\} - \mu\{P \cap T^{-s+1}(P^c), r < s \leqslant t\}| \\
+ \quad & |\mu\{P \cap T^{-s+1}(P^c), r < s \leqslant t\} - \mu(P)\mu\{T^{-s+1}(P^c), r < s \leqslant t\}| \\
+ \quad & \mu(P)|\mu\{T^{-s+1}(P^c), r < s \leqslant t\} - \mu\{\tau_P > t\}|.
\end{aligned}$$

Borne pour le troisième terme :
En utilisant l'inclusion

$$\left(\bigcap_{r<s\leqslant t} T^{-s+1}P^c\right) \setminus \left(\bigcap_{1\leqslant s\leqslant t} T^{-s+1}P^c\right) \subset \left(\bigcup_{1\leqslant s\leqslant r} T^{-s+1}P\right)$$

il vient :

$$\begin{aligned}
|\mu\{T^{-s+1}(P^c), r < s \leqslant t\} - \mu\{T^{-s+1}(P^c), 1 \leqslant s \leqslant t\}| \quad & \leqslant \quad \mu\{\cup_{1\leqslant s\leqslant r} T^{-s+1}(P)\} \\
& \leqslant \quad r\mu(P)
\end{aligned}$$

donc une borne supérieure pour le troisième terme est : $r\mu(P)^2$. Pour le second, l'inégalité de mélange (inégalité 21) donne la borne suivante : $C\xi^r$. Quant au premier terme, on obtient l'estimée :

$$\sum_{i=1}^{r} \mu\{P \cap T^{-i+1}(P)\}$$

Il reste à sommer sur les n-cylindres. Pour le troisième terme, on a :

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n} r\mu(P)^2 \leqslant rCe^{-\kappa n} \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \mu(P) \leqslant rCe^{-\kappa n}$$

Pour le deuxième, on obtient :

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n} C\xi^r \leqslant K\xi^r (\#\mathcal{P})^n$$

Le bon choix de r va donner la convergence vers zéro. Pour le premier terme, on doit distinguer les cylindres qui sont trop vite récurrents :
Si $P \in E_{<k}$ alors $\mu\{P \cap T^{-i+1}(P)\} \leqslant \mu(P) \leqslant Ce^{-\kappa n}$ et

$$\sum_{P \in E_{<k}} \sum_{i=1}^{r} \mu\{P \cap T^{-i+1}(P)\} \leqslant \sum_{P \in E_{<k}} rCe^{-\kappa n} \leqslant rCe^{-\kappa n + k \log(\#\mathcal{P})}$$

D'autre part, si $P \in E^c_{<k}$, $\forall i < k$: $\mu\{P \cap T^{-i+1}(P)\} = 0$ et

$$\sum_{P \in E^c_{<k}} \sum_{i=1}^{r} \mu\{P \cap T^{-i+1}(P)\} \leqslant \sum_{P \in E^c_{<k}} \sum_{i=k}^{r} \mu\{P \cap T^{-i+1}(P)\}$$

Et si $i \geqslant k$, la propriété de mélange entraîne :

$$\mu\{P \cap T^{-i+1}(P)\} \leqslant (K\xi^k + Ce^{-\kappa n})\mu(P)$$

$$\sum_{i=k}^{r} \mu\{P \cap T^{-i+1}(P)\} \leqslant r(K\xi^k + Ce^{-\kappa n})\mu(P)$$

$$\sum_{P \in E^c_{<k}} \sum_{i=k}^{r} \mu\{P \cap T^{-i+1}(P)\} \leqslant r(K\xi^k + Ce^{-\kappa n})$$

On choisit alors $r = min(n^2, \sqrt{nt_n})$ et $k = [\frac{\kappa n}{2\log(\#\mathcal{P})}]$ (on a seulement à modifier κ pour assurer $k < n$) ce qui donne la convergence de tous les termes vers zéro.
■

III.5 Approximation de la loi du temps d'entrée dans un cylindre.

Cette partie plutôt technique est destinée à contrôler la loi du temps d'entrée dans un cylindre. Comme on l'a remarqué dans la partie précédente, on a besoin de ce contrôle pour estimer la loi asymptotique des temps de retour. Jusqu'à la fin, toute espérance sera prise par rapport à la mesure μ
Ici, on prouve la proposition suivante :

Proposition 8 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que, pour tout $n > N_\varepsilon$ il existe $H_{n,\varepsilon} \subset \mathcal{P}_n$ avec :*

$$\mu\left(\bigcup_{P \in H_{n,\varepsilon}} P\right) > 1 - K\varepsilon$$

Il existe deux constantes strictement positives β et K (indépendantes de n et ε) telles que, pour tout n-cylindre P$\in H_{n,\varepsilon}$:

$$\sup_{t>0}\left|\mu\left\{\tau_P > \frac{t}{\mu(P)}\right\} - e^{-t}\right| \leqslant Ke^{-\beta n}\ .$$

Pour prouver ce théorème, on utilise la méthode de A. Galves et B. Schmitt ([GS]).
Pour tout k et m nombres réels positifs, soit :

$$X_k = \sum_{l=0}^{[k]} \mathbf{1}_P \circ T^l \quad X_{[k,m]} = X_{[m]} - X_{[k]}$$

On a : $\{\tau_P \leqslant k\} = \{X_k \geqslant 1\}$.

Lemme 25 *Pour tout $t > 0$, on a, si P est mesurable :*

$$\mu\left\{\tau_P \leqslant \frac{t}{\mu(P)}\right\} \leqslant t + \mu(P)$$

Preuve : Soit $X = X_{[\frac{t}{\mu(P)}]} = \sum_{l=0}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}$.
D'une part :

$$\mu\left\{\tau_P \leqslant \frac{t}{\mu(P)}\right\} = \mu(X \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(X)$$

car X ne prend que des valeurs entières.
D'autre part :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{l=0}^{[\frac{t}{\mu(P)}]} \mathbb{E}(\mathbf{1}_A \circ T^l) = \sum_{l=0}^{[\frac{t}{\mu(P)}]} \mathbb{E}(\mathbf{1}_A) \leqslant t + \mu(A)$$

à cause de l'invariance de la mesure μ. ■

Lemme 26 *Il existe γ_0 tel que, pour tout ε, il existe N_ε tel que, pour tout $n > N_\varepsilon$ il existe $I_{n,\varepsilon} \subset \mathcal{P}_n$ tel que, pour tout $P \in I_{n,\varepsilon}$, pour tout $t > 0$*

$$\mu\left\{\tau_P \leqslant \frac{t}{\mu(P)}\right\} \geqslant \frac{t^2}{t^2 + \mu(P)(1+t) + t(1+Ke^{-n\gamma_0})}$$

De plus,

$$\mu\left(\bigcup_{P\in I_{n,\varepsilon}} P\right) > 1 - \varepsilon$$

Preuve : En utilisant l'inégalité de Schwarz, on a :

$$\mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mu(X \geqslant 1)$$

et donc

$$\mu\left\{\tau_P \leqslant \frac{t}{\mu(P)}\right\} = \mu\{X \geqslant 1\} \geqslant \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$$

Pour le numérateur, on a : $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{[\frac{t}{\mu(P)}]} \mathbb{E}(\mathbf{1}_P(T^i)) = \left([\frac{t}{\mu(P)}]+1\right)\mu(P)$ et donc :

$$\mathbb{E}(X)^2 = \left(\left([\frac{t}{\mu(P)}]+1\right)\mu(P)\right)^2 \geqslant t^2$$

Pour le dénominateur,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{l=0}^{[\frac{t}{\mu(P)}]} \mathbb{E}(\mathbf{1}_P \circ T^l) + 2\sum_{l=1}^{[\frac{t}{\mu(P)}]} \left([\frac{t}{\mu(P)}] - l + 1\right)\mu\{P \cap T^{-l}(P)\}$$

Le premier terme est $\mathbb{E}(X) \leqslant t + \mu(P)$. On borne le second pour les cylindres qui ne sont pas trop vite récurrents ; Pour $P \in E^c_{<[ns]}$ (où s est positif) on obtient :

$$\sum_{l=1}^{[\frac{t}{\mu(P)}]} \left([\frac{t}{\mu(P)}] - l - 1\right)\mu\{P \cap T^{-l}(P)\} = \sum_{l=[ns]}^{[\frac{t}{\mu(P)}]} \left([\frac{t}{\mu(P)}] - l - 1\right)\mu\{P \cap T^{-l}(P)\}$$

la propriété de mélange donne pour ce terme :

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=[ns]}^{[\frac{t}{\mu(P)}]} \left([\frac{t}{\mu(P)}] - l + 1\right)\left[K\xi^l\mu(P) + \mu(P)^2\right] \\
&\qquad \leqslant \mu(P)^2 \sum_{l=[ns]}^{[\frac{t}{\mu(P)}]} \left([\frac{t}{\mu(P)}] - l + 1\right) + K\mu(P) \sum_{l=[ns]}^{[\frac{t}{\mu(P)}]} \left([\frac{t}{\mu(P)}] - l + 1\right)\xi^l \\
&\qquad \leqslant \mu(P)^2(\frac{t}{\mu(P)})(\frac{t}{\mu(P)} + 1) + K\mu(P)(\frac{t}{\mu(P)}) \sum_{l=[ns]}^{[\frac{t}{\mu(P)}]} \xi^l \\
&\qquad \leqslant t(t+\mu(P)) + Kt\xi^{ns}
\end{aligned}$$

On choisit alors $s = \frac{\kappa}{2\log\#\mathcal{P}}$ (où κ est donné par le lemme 20) si bien que, pour n assez grand :

$$\mu\left(\bigcup_{P \in E_{<[ns]}} P\right) \leqslant C\#\mathcal{P}_{ns}e^{-\kappa n} \leqslant Ce^{-n\frac{\kappa}{2}} < \varepsilon$$

On prend $I_{n,\varepsilon} = E^c_{<[ns]}$. ■

Soit $g_P(t) = \mu\left\{\tau_P > \frac{t}{\mu(P)}\right\} = \mu\{X = 0\}$.

Propriété d'indépendance On doit montrer que $g_P(t)$ est proche de e^{-t} ; pour cela, on montre que cette fonction satisfait une sorte de propriété d'indépendance. Nous allons montrer premièrement que $g_P(t)$ est proche de e^{-t} quand t est une certaine puissance de $\mu(P)$; ensuite, $t > 0$ étant donné, on va le diviser par cette puissance de $\mu(P)$.

Rappelons que l'on note K toute constante indépendante de n et des cylindres.

Lemme 27 *Pour n assez grand et pour tout n-cylindre P :*

$$\sup_{s \geqslant \sqrt{\mu(P)}} |g_P(\sqrt{\mu(P)} + s) - g_P(\sqrt{\mu(P)})g_P(s)| \leqslant K\mu(P)^{\frac{3}{4}}$$

Preuve : On doit estimer $|g_P(t+s) - g_P(t)g_P(s)|$. Pour commencer, on fait un trou Δ entre $[0, \frac{t}{\mu(P)}]$ et $[\frac{t}{\mu(P)}, \frac{t+s}{\mu(P)}]$. Ce trou, grâce à l'inégalité de mélange, va nous permettre d'exprimer la probabilité de ne pas être dans P durant le temps $[0, \frac{t}{\mu(P)}] \cup [\frac{t}{\mu(P)} + \Delta, \frac{t+s}{\mu(P)}]$ en fonction du produit des probabilités de ne pas être dans P durant chacun des intervalles $[0, \frac{t}{\mu(P)}]$ et $[\frac{t}{\mu(P)} + \Delta, \frac{t+s}{\mu(P)}]$.

$$\begin{aligned} |g_P(t+s) &- g_P(t)g_P(s)| \leqslant |g_P(t+s) - \mu\{X_{[\frac{t}{\mu(P)}]} + X_{[\frac{t}{\mu(P)}+\Delta, \frac{t+s}{\mu(P)}]} = 0\}| \\ &+ |\mu\{X_{[\frac{t}{\mu(P)}]} + X_{[\frac{t}{\mu(P)}+\Delta, \frac{t+s}{\mu(P)}]} = 0\} - g_P(t)\mu\{X_{[\Delta, \frac{s}{\mu(P)}]} = 0\}| \\ &+ |g_P(t)||\mu\{X_{[\Delta, \frac{s}{\mu(P)}]} = 0\} - g_P(s)| \end{aligned}$$

Bornes pour le premier terme :

$$\begin{aligned} |g_P(t+s) &- \mu\{X_{[\frac{t}{\mu(P)}]} + X_{[\frac{t}{\mu(P)}+\Delta, \frac{t+s}{\mu(P)}]} = 0\}| \\ &= \mu\{X_{[\frac{t}{\mu(P)}, \frac{t}{\mu(P)}+\Delta]} > 0\} = \mu\{X_{\Delta-1} > 0\} \leqslant \Delta\mu(P) \end{aligned} \tag{24}$$

à cause de l'invariance par T. De même pour le troisième terme :

$$|\mu\{X_{[\Delta, \frac{s}{\mu(P)}]} = 0\} - g_P(s)| \leqslant \Delta\mu(P) \tag{25}$$

Pour le second terme, on utilise l'inégalité de mélange et on note :

$$L_P(f) = L(f\mathbf{1}_P)$$

Rappelons que nous avons normalisé L en notant :

$$\mathcal{L} = \frac{L}{\lambda} \quad , \quad \mathcal{L}_P = \frac{L_P}{\lambda}$$

$$
\begin{aligned}
&|\mu\{X_{[\frac{t}{\mu(P)}]} + X_{[\frac{t}{\mu(P)}+\Delta,\frac{t+s}{\mu(P)}]} = 0\} - g_P(t)\mu\{X_{[\Delta,\frac{s}{\mu(P)}]} = 0\}| \\
&= \left| \int \prod_{0}^{[\frac{t}{\mu(P)}]} \mathbf{1}_{P^c} \circ T^i \prod_{[\frac{t}{\mu(P)}]+\Delta+1}^{[\frac{t+s}{\mu(P)}]} \mathbf{1}_{P^c} \circ T^i h d\nu - \int \prod_{0}^{[\frac{t}{\mu(P)}]} \mathbf{1}_{P^c} \circ T^i h d\nu \int \prod_{\Delta+1}^{[\frac{s}{\mu(P)}]} \mathbf{1}_{P^c} \circ T^i \, d\mu \right| \\
&= \left| \int \mathbf{1}_{P^c} \mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h) \prod_{\Delta+1}^{[\frac{s}{\mu(P)}]} \mathbf{1}_{P^c} \circ T^i d\nu - \int \mathbf{1}_{P^c} \mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h) d\nu \int \prod_{0}^{[\frac{s}{\mu(P)}]-\Delta-1} \mathbf{1}_{P^c} \circ T^i \, d\mu \right| \\
&= \left| \int \mathbf{1}_{P^c} \frac{\mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h)}{h} \left(\prod_{0}^{[\frac{s}{\mu(P)}]-\Delta-1} \mathbf{1}_{P^c} \circ T^i \right) \circ T^{\Delta+1} \, d\mu \right. \\
&\qquad \left. - \int \mathbf{1}_{P^c} \frac{\mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h)}{h} \, d\mu \int \prod_{0}^{[\frac{s}{\mu(P)}]-\Delta-1} \mathbf{1}_{P^c} \circ T^i \, d\mu \right| \\
&\leqslant K\xi^{\Delta+1} \left[\left\| \mathbf{1}_{P^c} \frac{\mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h)}{h} \right\|_\infty + \mathrm{var}_\theta \left(\mathbf{1}_{P^c} \frac{\mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h)}{h} \right) \right] \int \prod_{0}^{[\frac{s}{\mu(P)}]-\Delta-1} \mathbf{1}_{P^c} \circ T^i \, d\mu \\
&\leqslant K\xi^{\Delta+1} \left[\left\| \mathbf{1}_{P^c} \frac{\mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h)}{h} \right\|_\infty + \mathrm{var}_\theta(\mathbf{1}_{P^c} \mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h)) \left\| \frac{1}{h} \right\|_\infty \right. \\
&\qquad \left. + \mathrm{var}_\theta \left(\frac{1}{h} \right) \| \mathbf{1}_{P^c} \mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h) \|_\infty \right] \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Dans (26), on a utilisé la propriété suivante de la variation (qui se déduit immédiatement du lemme 6) :

$$
\mathrm{var}_\theta(fg) \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{var}_\theta(g) + \|g\|_\infty \mathrm{var}_\theta(f).
$$

Mais h est à variation bornée et $\overline{\inf}(h) > 0$. Cela implique : $\frac{1}{h}$ est à variation bornée.
De plus, $\|\mathbf{1}_{P^c} \mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h)\|_\infty \leqslant K$ car $f \mapsto f\mathbf{1}_{P^c}$ est un opérateur de norme inférieure à un et $(\|\mathcal{L}^n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée (voir lemme 15).

$$
\begin{aligned}
(26) &\leqslant K\xi^{\Delta+1} \left[\int \mathbf{1}_{P^c} \mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h) \, d\nu + K + K \ \mathrm{var}_\theta(\mathbf{1}_{P^c} \mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h)) \right] \\
&\leqslant K\xi^{\Delta+1} \left[g_P(t) + K + K \ \mathrm{var}_\theta(\mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h)) \|\mathbf{1}_{P^c}\|_\infty \right. \qquad (27) \\
&\qquad \left. + \mathrm{var}_\theta(\mathbf{1}_{P^c}) \|\mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h)\|_\infty \right] \\
&\leqslant K\xi^{\Delta+1} \left[K + K \ \mathrm{var}_\theta(\mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h)) \right] \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Où on a encore utilisé :

$$\mathrm{var}_\theta(fg) \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{var}_\theta(g) + \|g\|_\infty \mathrm{var}_\theta(f).$$

et le fait que $\mathbf{1}_{P^c}$ est à variation finie ne dépendant pas de la longueur du cylindre. (voir remarque 4)
On doit estimer $\mathrm{var}_\theta(\mathcal{L}_{P^c}^{[\frac{t}{\mu(P)}]}(h))$, pour cela, on utilise le fait que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_P + \mathcal{L}_{P^c}$.

$$\mathcal{L}_{P^c}^N = (\mathcal{L} - \mathcal{L}_P)^N = \mathcal{L}^N - \sum_{r=0}^{N-1} \mathcal{L}^r \mathcal{L}_P \mathcal{L}^{N-r-1} + \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant N-2} \mathcal{L}^i \mathcal{L}_P \mathcal{L}_{P^c}^{N-i-j-2} \mathcal{L}_P \mathcal{L}^j$$

Puisque $\mathcal{L}(h) = h$, on obtient :

$$\mathcal{L}_{P^c}^N(h) = h - \sum_{r=0}^{N-1} \mathcal{L}^r \mathcal{L}_P(h) + \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant N-2} \mathcal{L}^i \mathcal{L}_P \mathcal{L}_{P^c}^{N-i-j-2} \mathcal{L}_P \mathcal{L}^j(h)$$

Un calcul montre que :

$$\mathcal{L}^i \mathcal{L}_P \mathcal{L}_{P^c}^{N-i-j-2} \mathcal{L}_P \mathcal{L}^j = \mathcal{L}^i \mathcal{L}_{B_{i,j}} \mathcal{L}^{N-i-1}$$

avec $B_{i,j} = P \cap T^{-1}(P^c) \cap T^{-2}(P^c) \cap .. \cap T^{-(N-i-j-2)}(P^c) \cap T^{-(N-i-j-1)}(P)$. Supposons que P soit un n-cylindre avec $n > N$. $T^{-(N-i-j-1)}(P)$ est une union de (n+N-i-j-1)-cylindres dont chacun est inclus dans un (N-i-j-1)-cylindre distinct (il faut remarquer que $N-i-j-1$ est un entier strictement positif puisque $i+j$ varie de 0 à $N-2$. Puisque P est un n-cylindre avec $n > N$, $P \cap T^{-(N-i-j-1)}(P)$ est soit un (n+N-i-j-1)-cylindre, soit l'ensemble vide. Soit alors $k \in [1, \ldots, N-i-j-2]$, comme P^c est une union de n-cylindres disjoints, $T^{-k}(P^c)$ est une union de (n+k)-cylindres disjoints. Puisque $n+k < n+N-i-j-1$, chacun de ces (n+k)-cylindres soit contient soit est disjoint du (n+N-i-j-1)-cylindre $P \cap T^{-(N-i-j-1)}(P)$, par conséquent, $B_{i,j}$ est soit un (n+N-i-j-1)-cylindre, soit l'ensemble vide.

$$\mathcal{L}_{P^c}^N(h) = h - \sum_{r=0}^{N-1} \mathcal{L}^r \mathcal{L}_P(h) + \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant N-2} \mathcal{L}^i \mathcal{L}_{B_{i,j}}(h) \tag{29}$$

On doit estimer la variation de chaque terme.
D'une part, si P est un cylindre, on applique l'inégalité de Lasota-Yorke à la fonction $\mathbf{1}_P h$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \mathrm{var}_\theta \mathcal{L}_P(h) &= \mathrm{var}_\theta \mathcal{L}(\mathbf{1}_P h) \leqslant C_1 \zeta \ \mathrm{var}_\theta(\mathbf{1}_P h) + C_2 \|\mathbf{1}_P h\|_\nu \\ &\leqslant C_1 \zeta (\mathrm{var}_\theta(h) + \mathrm{var}_\theta(\mathbf{1}_P)\|h\|_\infty) + C_2 \\ &\leqslant K\zeta \ \mathrm{var}_\theta(h) + K\|h\|_\infty + K \end{aligned} \tag{30}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Lasota-Yorke itérée on a : (pour f à variation bornée)

$$\mathrm{var}_\theta \mathcal{L}^N(h) \leqslant C_1 \zeta^N \mathrm{var}_\theta(h) + C_2 \|h\|_\nu \leqslant C_1 \zeta^N \mathrm{var}_\theta(h) + C_2 \tag{31}$$

en rassemblant (30) et (31), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{var}_\theta(\mathcal{L}^r\mathcal{L}_P(h)) &\leqslant C_1\zeta^r \mathrm{var}_\theta(\mathcal{L}_P(h)) + C_2 \\ &\leqslant K\zeta^{r+1}\mathrm{var}_\theta(h) + K\zeta^r\|h\|_\infty + K \end{aligned} \tag{32}$$

Puisque $B_{i,j}$ est un cylindre (et il est inclus dans P), on peut appliquer (32) :

$$\mathrm{var}_\theta(\mathcal{L}^i\mathcal{L}_{B_{i,j}}(h)) \leqslant K\zeta^{i+1}\mathrm{var}_\theta(h) + K\zeta^i\|h\|_\infty + K$$

Comme $\zeta < 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathrm{var}_\theta(\mathcal{L}^r\mathcal{L}_P(h)) \leqslant K \\ \mathrm{var}_\theta(\mathcal{L}^i\mathcal{L}_{B_{i,j}}(h)) \leqslant K \end{aligned}$$

Sommons maintenant sur r, i et j en utilisant la relation :

$$\sum_{0\leqslant i+j\leqslant N-2} 1 = \frac{N(N-1)}{2} \leqslant N^2$$

$$\sum_{r=0}^{N-1} \mathrm{var}_\theta(\mathcal{L}^r\mathcal{L}_P(h)) \leqslant KN$$

$$\sum_{0\leqslant i+j\leqslant N-2} \mathrm{var}_\theta(\mathcal{L}^i\mathcal{L}_{B_{i,j}}(h)) \leqslant KN^2$$

et d'après la relation (29), on obtient, pour N assez grand :

$$\mathrm{var}_\theta(\mathcal{L}^N_{P^c}(h)) \leqslant K + KN + KN^2 \leqslant KN^2$$

En combinant (24), (25) et (28), on obtient (avec $N = [\frac{t}{\mu(P)}]$) :

$$|g_P(t+s) - g_P(t)g_P(s)| \leqslant K(\frac{t}{\mu(P)})^2\xi^{\Delta+1} + 2\Delta\mu(P)$$

si $\frac{t}{\mu(P)}$ est assez grand. On choisit alors la taille du trou Δ : la seule condition est $\Delta < \frac{s}{\mu(P)}$. Prenons $\Delta = \frac{1}{\mu(P)^{1/4}}$, $s \geqslant \sqrt{\mu(P)}$ et $t = \sqrt{\mu(P)}$:

$$\sup_{s\geqslant\sqrt{\mu(P)}} |g_P(\sqrt{\mu(P)}+s) - g_P(\sqrt{\mu(P)})g_P(s)| \leqslant K\frac{1}{\mu(P)}\xi^{\frac{1}{\mu(P)^{1/4}}+1} + 2\mu(P)^{3/4}$$

si n est assez grand : $\frac{1}{\mu(P)}\xi^{\frac{1}{4\sqrt{\mu(P)}}+1} \leqslant \mu(P)^{3/4}$ et donc

$$\sup_{s\geqslant\sqrt{\mu(P)}} |g_P(\sqrt{\mu(P)}+s) - g_P(\sqrt{\mu(P)})g_P(s)| \leqslant K\mu(P)^{3/4}$$

■

Définissons $r = r(P) = \sqrt{\mu(P)}$ et $\theta(P) = -\log\ g_P(r)$.

Lemme 28 *Pour n assez grand et tout n-cylindre P :*

$$|g_P(kr(P)) - e^{-k\theta(P)}| \leqslant \frac{K\mu(P)^{3/4}}{1 - e^{-\theta(P)}}$$

Preuve : Voir [GS](lemme 6)(preuve par récurrence). ■

Lemme 29 *Il existe γ_1 et γ_2 tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que, pour tout $n > N_\varepsilon$, pour tout $P \in I_{n,\varepsilon}$ (où $I_{n,\varepsilon}$ est donné par le lemme 26) :*

$$1 - Ke^{-\gamma_1 n} \leqslant \frac{\theta(P)}{r(P)} \leqslant 1 + Ke^{-\gamma_2 n}$$

Preuve : D'une part, pour $0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}$, $-\log(1-u) \leqslant u + u^2$. Alors on a, en choisissant n assez grand et en utilisant le lemme 25 :

$$\begin{aligned} \theta(P) &\leqslant \mu\left\{\tau_P \leqslant \frac{r(P)}{\mu(P)}\right\} + \left(\mu\left\{\tau_P \leqslant \frac{r(P)}{\mu(P)}\right\}\right)^2 \\ &\leqslant r(P) + \mu(P) + (r(P) + \mu(P))^2 \\ &\leqslant r(P)(1 + Ke^{-n\gamma_2}) \end{aligned}$$

puisque, d'après le lemme 20, $\mu(P) \leqslant Ce^{-n\kappa}$. D'autre part, d'après le lemme 26, si $P \in I_{n,\varepsilon}$:

$$\theta(P) \geqslant 1 - e^{-\theta(P)} \geqslant \frac{r(P)^2}{r(P)^2 + \mu(P)(1 + r(P)) + r(P)(1 + Ke^{-n\gamma_0})} \qquad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta(P)}{r(P)} &\geqslant \frac{\sqrt{\mu(P)}}{\mu(P) + \mu(P)(1 + \sqrt{\mu(P)}) + \sqrt{\mu(P)}(1 + Ke^{-n\gamma_0})} \\ &\geqslant \frac{1}{1 + Ke^{-n\gamma_1}} \geqslant 1 - Ke^{-n\gamma_1} \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ■

Preuve de la proposition 8 :

Soit $\varepsilon > 0$. On considère seulement les cylindres $P \in I_{n,\varepsilon}$ et n assez grand de façon à pouvoir utiliser les lemmes précédents. Soit $t > 0$, $t = kr(P) + v$ avec $k = [\frac{t}{r(P)}]$ et $0 \leqslant v < r(P)$:

$$\begin{aligned} |g_P(t) - e^{-t}| &\leqslant |g_P(t) - g_P(kr(P))| \\ &+ |g_P(kr(P)) - e^{-\theta(P)k}| \\ &+ |e^{-\theta(P)k} - e^{-r(P)k}| \\ &+ |e^{-r(P)k} - e^{-t}| \end{aligned}$$

Dans le reste de la preuve, on utilise le lemme 20 qui assure que la mesure des n-cylindres décroît exponentiellement vite. Premier terme, d'après le lemme 25 :

$$|g_P(t) - g_P(kr(P))| = \mu\left\{\frac{kr(P)}{\mu(P)} < \tau_P \leqslant \frac{t}{\mu(P)}\right\} = \mu\left\{0 < \tau_P \leqslant \frac{v}{\mu(P)}\right\}$$

$$\leqslant \mu(P)(1 + \frac{v}{\mu(P)}) \leqslant 2r(P) \leqslant Ke^{-\beta n}$$

Second terme : d'après le lemme 28 : $|g_P(kr(P)) - e^{-\theta(P)k}| \leqslant K\frac{\mu(P)^{\frac{3}{4}}}{1-e^{-\theta(P)}}$ et en inversant l'inégalité (33) :

$$\frac{1}{1-e^{-\theta(P)}} \leqslant 2 + \sqrt{\mu(P)} + \frac{1}{\sqrt{\mu(P)}}(1 + Ke^{-n\gamma_0})$$

$$K\frac{\mu(P)^{\frac{3}{4}}}{1-e^{-\theta(P)}} \leqslant K\mu(P)^{\frac{3}{4}} + K\mu(P)^{\frac{1}{4}} \leqslant Ke^{-n\beta}$$

Quatrième terme :

$$|e^{-r(P)k} - e^{-t}| \leqslant v \leqslant \sqrt{\mu(P)} \leqslant Ke^{-n\beta}$$

Troisième terme : un calcul montre que

$$|e^{-\theta(P)k} - e^{-r(P)k}| \leqslant 2k|\theta(P) - r(P)|(e^{-\theta(P)k} + e^{-r(P)k})$$

Le lemme 29 assure que

$$-Ke^{-n\gamma_1}r(P) \leqslant \theta(P) - r(P) \leqslant Ke^{-n\gamma_2}r(P)$$

$$\begin{aligned}
|e^{-\theta(P)k} - e^{-r(P)k}| &\leqslant Kr(P)ke^{-n\beta}(e^{-\theta(P)k} + e^{-r(P)k}) \\
&\leqslant Ke^{-n\beta}(r(P)ke^{-r(P)k} + \theta(P)ke^{-\theta(P)k}\frac{r(P)}{\theta(P)}) \\
&\leqslant Ke^{-n\beta}
\end{aligned}$$

parce que ue^{-u} et $\frac{r(P)}{\theta(P)}$ sont bornés. Cela conclut la preuve.

III.6 Fluctuations de R_n

La mesure des cylindres, d'une part, et la loi des temps d'entrée, d'autre part, ont une influence différente sur la somme (23). Donc, nous devons déterminer lequel des deux est le plus important et donnera le comportement de la loi de R_n.

Jusqu'à la fin, nous noterons h l'entropie métrique pour la mesure μ ($h = h_\mu(T)$) On doit prouver la convergence en loi ce qui signifie :

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\{R_n > e^{nh} e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Soit $\varepsilon > 0$. Coupons cette quantité en trois parties afin d'appliquer le lemme 24 et l'approximation de la loi des temps d'entrée :

$$\begin{aligned}
\mu\{R_n > e^{nh} e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}\} &= \Big(\mu\{R_n > e^{nh} e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}\} \\
&\quad - \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \mu(P)\mu\left\{\tau_P > e^{nh} e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}\right\}\Big) \qquad (34) \\
&+ \Big(\sum_{P\in\mathcal{P}_n} \mu(P)\mu\left\{\tau_P > e^{nh} e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}\right\} \\
&\quad - \sum_{P\in H_{n,\varepsilon}\cap G_{n,\varepsilon}} \mu(P)\mu\left\{\tau_P > e^{nh} e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}\right\}\Big) \qquad (35) \\
&+ \Big(\sum_{P\in H_{n,\varepsilon}\cap G_{n,\varepsilon}} \mu(P)\mu\left\{\tau_P > e^{nh} e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}\right\} \\
&\quad - \sum_{P\in H_{n,\varepsilon}\cap G_{n,\varepsilon}} \mu(P) e^{-\mu(P) e^{nh} e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}}\Big) \qquad (36) \\
&+ \sum_{P\in H_{n,\varepsilon}\cap G_{n,\varepsilon}} \mu(P) e^{-\mu(P) e^{nh} e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}} \qquad (37)
\end{aligned}$$

Grâce au lemme 24, $\lim_{n\to+\infty}(34) = 0$.
D'après le lemme 22, il existe N_ε et $D(\varepsilon)$ tel que pour tout $n > N_\varepsilon$, pour tout $P \in B(n, D(\varepsilon))$ et tout x de P : (on utilise la notation $B(n, D(\varepsilon)) = G_{n,\varepsilon}$)

$$\frac{1}{D(\varepsilon)} \leqslant \frac{\mu(P)}{\lambda^{-n} g_n(x)} \leqslant D(\varepsilon) \qquad (38)$$

$$\mu\left(\bigcup_{P\in G_{n,\varepsilon}} P\right) \geqslant 1 - K\varepsilon$$

D'après la proposition 8,il existe N'_ε tel que, pour tout $n > N'_\varepsilon$, il existe $H_{n,\varepsilon} \in \mathcal{P}_n$ tel que, pour tout P dans cet ensemble :

$$\sup_{t>0} \left|\mu\{\tau_P > t\} - e^{-t\mu(P)}\right| \leqslant K e^{-\beta n}$$

$$\mu\left(\bigcup_{P\in H_{n,\varepsilon}} P\right) \geqslant 1-K\varepsilon \tag{39}$$

Si $n > \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
|(35)| &= \left|\sum_{P\in(H_{n,\varepsilon}\cap G_{n,\varepsilon})^c} \mu(P)\mu\left\{\tau_P > e^{nh}e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}\right\}\right| \leqslant \left|\sum_{P\in(H_{n,\varepsilon}\cap G_{n,\varepsilon})^c}\mu(P)\right| \\
&\leqslant \sum_{P\in G^c_{n,\varepsilon}} \mu(P) + \sum_{P\in H^c_{n,\varepsilon}} \mu(P) \\
&\leqslant K\varepsilon
\end{aligned}$$

Quant au terme (36), d'après la proposition 8, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
|(36)| &\leqslant \sum_{P\in H_{n,\varepsilon}\cap G_{n,\varepsilon}} \mu(P)\left|\mu\left\{\tau_P > e^{nh}e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}\right\} - e^{-\mu(P)e^{nh}e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}}\right| \\
&\leqslant Ke^{-\beta n}\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\mu(P) \leqslant Ke^{-\beta n}
\end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant au terme (37), que l'on peut écrire $\mu(Y_{n,\varepsilon})$ si on appelle $Y_{n,\varepsilon}$ la variable aléatoire :

$$Y_{n,\varepsilon} = \sum_{P\in H_{n,\varepsilon}\cap G_{n,\varepsilon}} \mathbf{1}_P e^{-\mu(P)e^{nh}e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}}$$

Soit $\eta > 0$, l'inégalité de Markov va nous donner des informations sur $\liminf \mu(Y_{n,\varepsilon})$:

$$\mu(Y_{n,\varepsilon}) \geqslant e^{-e^{-\eta\sqrt{n}}}\mu\{(\log\ Y_{n,\varepsilon} \geqslant -e^{-\eta\sqrt{n}}) \cap (\bigcup_{G_{n,\varepsilon}\cap H_{n,\varepsilon}} P)\}$$

et d'après le lemme 22, on a les deux inclusions suivantes :

$$\begin{aligned}
&\left(\left(D(\varepsilon)\lambda^{-n}g_n \leqslant \frac{e^{-\eta\sqrt{n}}}{e^{nh}e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}}\right) \quad\cap\quad (\bigcup_{G_{n,\varepsilon}\cap H_{n,\varepsilon}} P)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad \subset \quad \left((\log Y_{n,\varepsilon} \geqslant -e^{-\eta\sqrt{n}}) \cap (\bigcup_{G_{n,\varepsilon}\cap H_{n,\varepsilon}} P)\right)
\end{aligned}$$

$$\left(\lambda^{-n}g_n \leqslant \frac{e^{-2\eta\sqrt{n}}}{e^{nh}e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}}\right) \subset \left(D(\varepsilon)\lambda^{-n}g_n \leqslant \frac{e^{-\eta\sqrt{n}}}{e^{nh}e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}}\right)$$

pour n assez grand. En conséquence, on a les inégalités :

$$\begin{aligned}
\mu(Y_{n,\varepsilon}) &\geqslant e^{-e^{-\eta\sqrt{n}}}\mu\left(\left(\lambda^{-n}g_n \leqslant \frac{e^{-2\eta\sqrt{n}}}{e^{nh}e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}}\right)\cap(\bigcup_{G_{n,\varepsilon}\cap H_{n,\varepsilon}} P)\right)\\
&\geqslant e^{-e^{-\eta\sqrt{n}}}\mu\left(\left(\frac{-\log\ g_n + n\log\lambda - nh}{\sigma(\varphi)\sqrt{n}} \geqslant u + \frac{2\eta}{\sigma(\varphi)}\right)\cap(\bigcup_{G_{n,\varepsilon}\cap H_{n,\varepsilon}} P)\right)
\end{aligned}$$

et $P_{\text{top}}(X) = \log\lambda = h + \mu(\varphi)$ donc

$$\begin{aligned}
e^{e^{-\eta\sqrt{n}}}\mu(Y_{n,\varepsilon}) &\geqslant \mu\left(\left(\frac{-\log\ g_n + n\mu(\varphi)}{\sigma(\varphi)\sqrt{n}} \geqslant u + \frac{2\eta}{\sigma(\varphi)}\right)\cap(\bigcup_{G_{n,\varepsilon}\cap H_{n,\varepsilon}} P)\right)\\
&\geqslant \mu\left(\frac{-\log\ g_n + n\mu(\varphi)}{\sigma(\varphi)\sqrt{n}} \geqslant u + \frac{2\eta}{\sigma(\varphi)}\right) - \mu(\bigcup_{(G_{n,\varepsilon}\cap H_{n,\varepsilon})^c} P)\\
&\geqslant \mu\left(\frac{-\log\ g_n + n\mu(\varphi)}{\sigma(\varphi)\sqrt{n}} \geqslant u + \frac{2\eta}{\sigma(\varphi)}\right) - \mu(\bigcup_{G^c_{n,\varepsilon}} P) - \mu(\bigcup_{H^c_{n,\varepsilon}} P)\\
&\geqslant \mu\left(\frac{-\log\ g_n + n\mu(\varphi)}{\sigma(\varphi)\sqrt{n}} \geqslant u + \frac{2\eta}{\sigma(\varphi)}\right) - K\varepsilon
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de la limite centrale au système (T, μ, φ), on obtient, en faisant tendre d'abord n vers l'infini, ensuite η vers zero :

$$\liminf_{n\to\infty}\ \mu(Y_{n,\varepsilon}) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx - K\varepsilon$$

Pour la $\limsup$, on utilise l'inégalité, pour $\eta > 0$ (en remarquant que $Y_{n,\varepsilon} \leqslant 1$) :

$$\begin{aligned}
\mu(Y_{n,\varepsilon}) &\leqslant e^{-e^{\eta\sqrt{n}}}\mu\{(\log\ Y_{n,\varepsilon} < -e^{\eta\sqrt{n}})\cap(\bigcup_{G_{n,\varepsilon}\cap H_{n,\varepsilon}} P)\}\\
&+ \mu\{(\log\ Y_{n,\varepsilon} \geqslant -e^{\eta\sqrt{n}})\cap(\bigcup_{G_{n,\varepsilon}\cap H_{n,\varepsilon}} P)\}
\end{aligned}$$

En utilisant l'autre inégalité dans le lemme 22, on a les inclusions suivantes :

$$\left(\left(\frac{\lambda^{-n}g_n}{D(\varepsilon)} \leqslant \frac{e^{\eta\sqrt{n}}}{e^{nh}e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}}\right)\cap(\bigcup_{G_{n,\varepsilon}\cap H_{n,\varepsilon}} P)\right) \supset \left((\log Y_{n,\varepsilon} \geqslant -e^{\eta\sqrt{n}})\cap(\bigcup_{G_{n,\varepsilon}\cap H_{n,\varepsilon}} P)\right)$$

$$\left(\lambda^{-n}g_n \leqslant \frac{e^{2\eta\sqrt{n}}}{e^{nh}e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}}\right) \supset \left(\frac{\lambda^{-n}g_n}{D(\varepsilon)} \leqslant \frac{e^{-\eta\sqrt{n}}}{e^{nh}e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}}\right)$$

pour n assez grand. On a alors les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mu(Y_{n,\varepsilon}) &\leqslant e^{-e^{\eta\sqrt{n}}}\mu\{(log\ Y_{n,\varepsilon} < -e^{\eta\sqrt{n}}) \cap (\bigcup_{G_{n,\varepsilon}\cap H_{n,\varepsilon}} P)\} \\
&\qquad +\mu\left(\left(\frac{-\log\ g_n + n\mu(\varphi)}{\sigma(\varphi)\sqrt{n}} \geqslant u - \frac{2\eta}{\sigma(\varphi)}\right) \cap (\bigcup_{G_{n,\varepsilon}\cap H_{n,\varepsilon}} P)\right) \\
&\leqslant e^{-e^{\eta\sqrt{n}}} + \mu\left(\frac{-\log\ g_n + n\mu(\varphi)}{\sigma(\varphi)\sqrt{n}} \geqslant u - \frac{2\eta}{\sigma(\varphi)}\right)
\end{aligned}$$

En faisant tendre d'abord n vers l'infini, ensuite η vers zero :

$$\limsup_{n\to\infty}\ \mu(Y_{n,\varepsilon}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

En rassemblant tous les résultats obtenus sur les termes (34), (36), (37), (38) :

$$\liminf_{n\to\infty} \mu\{R_n > e^{nh}e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}\} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx - K\varepsilon$$

$$\limsup_{n\to\infty} \mu\{R_n > e^{nh}e^{u\sigma(\varphi)\sqrt{n}}\} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx + K\varepsilon$$

Ceci termine la preuve.

Bibliographie

[AZ] K. Adl-Zarabi. Absolutely continuous invariant measures for piecewise expanding C^2 tranformations in $\mathbb{R}^n$ on domains with cusps on the boundary. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **16**, 1-18 (1996)

[Bi] P. Billingsley. Ergodic Theory and Information. *Wiley series in Probability and Math. Statistics* (1965)

[Bl] M. Blank Discreteness and continuity in problems of chaotic dynamics. *Translations of Mathematical Monographs* **161**

[B] R. Bowen. Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. *Lecture Notes in Math.* **470**, Springer-Verlag (1975)

[Bre] X. Bressaud. Opérateurs de transfert sur le décalage à alphabet dénombrable et applications. *Thèse de l'Université de Paris 6*, (1996).

[Br] A. Broise. Aspects stochastiques de certains systemes dynamiques : Transformations dilatantes de l'intervalle, fractions continues multidimensionnelles. *Thèse de l'Université de Rennes 1*, (1994).

[Bu1] J. Buzzi. Intrinsic ergodicity of smooth interval maps. *Israel J. Math.* **100**, 125-161 (1997)

[Bu2] J. Buzzi. a.c.i.m.'s as equilibrium states. *preprint I.M.L.*, **98/23** (1998).

[BM] J. Buzzi, V. Maume-Deschamps. Decay of correlations for piecewise invertible maps in higher dimensions. *preprint de l'Université de Bourgogne* (1999).

[BPS] J. Buzzi, F. Paccaut, B. Schmitt. Conformal measures for multidimensional piecewise invertible maps. à paraître dans*Ergodic Theory and Dynamical*

Systems

[C] P. Collet. Some ergodic properties of maps of the interval. *Dynamical and disordered systems.* R. Bamon, J.M. Gambaudo and S. Martinez ed.-Herman (1996)

[CG1] P. Collet, A. Galves. Statistics of close visits to the indifferent fixed point of an interval map. *J. Stat. Phys.* **72**, No 3-4, 459-478 (1993)

[CG2] P. Collet, A. Galves. Asymptotic distribution of entrance times for expanding maps of the interval. *Dynamical systems and applications,* 139-152, (1995) World Sci. Ser. Appl. Anal., 4, *World Sci. Publishing, River Edge, NJ.*

[CGS] P. Collet, A. Galves, B. Schmitt. Fluctuations of repetition times for gibbsian sources. (1997), to appear in *Nonlinearity.*

[Cw] W. J. Cowieson. Piecewise smooth expanding maps in $\mathbb{R}^d$. *Thesis University of California*, (1999).

[DGS] M. Denker, C. Grillenberger, K. Sigmund. Ergodic theory on compact spaces. *Lecture Notes in Mathematics*, **527**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[DU] M. Denker, M. Urbanski. On the existence of conformal measures. *Trans. of the Am. Math. Soc.* **328**, 563-587 (1991)

[DS] N. Dunford, J. Schwartz. *Linear operators. Part I. General theory.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.

[D] R. Durrett. *Probability : Theory and examples.* Duxbury Press, 1991.

[GS] A. Galves, B. Schmitt. Inequalities for hitting times in mixing dynamical systems. *Random Comput. Dyn.* **5**, No 4, 337-347 (1997)

[H] N. Haydn. The distribution of the first return time for rational maps. *J. Statist. Phys.* **94**, No 5-6, 1027-1036 (1999)

[HH] H. Hennion, L. Hervé. Théorèmes limites pour les chaînes de Markov et propriétés stochastiques des systèmes dynamiques par une méthode spectrale. *Prépublication de l'I.R.M.A.R. (Rennes).* **99-24**, (1999)

[Hi] M. Hirata. Poisson law for Axiom A diffeomorphisms. *Ergod. Th. Dynam. Syst.* **13**, No 3, 533-556 (1993)

[HSV] M. Hirata, B. Saussol, S. Vaienti. Statistics of return times : a general framework and new applications. *Comm. Math. Phys.* **206**, No 1, 33-55 (1999)

[ITM] C.T. Ionescu-Tulcea, G. Marinescu. Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues. *Annals of Math.* **206**, No 52, 140-147 (1950)

[KH] A. Katok, B. Hasselblatt. Introduction to the modern theory of dynamical systems. *Encyclopedia of Mathematics ans its Applications.* **54**, (1995) Cambridge University Press.

[K1] G. Keller. Propriétés ergodiques des endomorphismes dilatants C^2 par morceaux des régions bornées du plan. *Thèse de l'Université de Rennes* (1979)

[K2] G. Keller. Generalized bounded variation and application to piecewise monotonic transformations *Zeit. Wahrsch. Verw. Gebiete* **69**, No 3, 461-478 (1985)

[K3] G. Keller. Equilibrium states in ergodic theory. *London Mathematical Society Students Texts* **42**. Cambridge University Press, 1998.

[LY] A. Lasota, J.A. Yorke. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Trans. of the Am. Math. Soc.* **186**, No 4, 481-488 (1973)

[Le] F. Ledrappier. Some properties of absolutely continuous invariant measures on an interval. *Ergod. Th. Dynam. Syst.*, **1**, 77-93 (1981)

[L] C. Liverani. Central limit theorem for deterministic systems. *Proceedings of the International Congress on Dynamical Systems*, Montevideo 95. Research notes in Mathematics series, Pittman (1997)

[LSV] C. Liverani, B. Saussol, S. Vaienti. Conformal measure and decay of correlation for covering weighted systems. *Ergod. Th. Dynam. Syst.*, **18** No 6., 1399-1420 (1998)

[Nu] R. D. Nussbaum The radius of the essential spectrum. *Duke Math. J.*, **37**, 473-478 (1970)

[OW] D. Ornstein, B. Weiss. Entropy and data compression schemes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **39**, 78-83 (1993)

[P] F. Paccaut. Statistics of return times for weighted maps of the interval. à paraître dans*Annales de l'I.H.P - Probabilités et Statistiques*,

[PP] W. Parry, M. Pollicott. Zeta fonctions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics. *Astérisque*, **187-188**, (1990)

[Pe] K. Petersen. Ergodic theory. *Cambridge studies in advanced mathematics* **2**. Cambridge University Press, 1983.

[Pi] B. Pitskel. Poisson limit law for Markov chains. *Ergod. Th. Dynam. Syst.*, **11**,No 3, 501-513 (1991)

[R] W. Rudin. Analyse fonctionnelle. Ediscience international (1995)

[Ru] D. Ruelle. Thermodynamic formalism. Addison Wesley (1978)

[S] Ya. G. Sinai. Gibbs measures in ergodic theory. *Russian Math. Surveys*, **27**,No 4, 21-69 (1972)

[Sa] B. Saussol. Etude statistique de systèmes dynamiques dilatants. *Thèse de l'Université de Toulon et du var.* (1998)

[Ts] M. Tsujii. Piecewise expanding maps on the plane with singular properties. à paraître dans*Ergodic Theory and Dynamical Systems*

[W] P. Walters. Equilibrium states for β-transformations and related transformations. *Math. Zeitschrift*, **159**, 65-88 (1978)

[WZ] A. Wyner, J. Ziv. Some asymptotic properties of the entropy of a stationary ergodic data source with applications to data compression. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **35**, 1250-1258 (1989)

[Y] L. S. Young. Recurrence times and rates of mixing. to appear in *Israel Jounal of Math.*

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude de certaines propriétés statistiques de systèmes dynamiques inversibles par morceaux non markoviens. La principale difficulté pour des sytèmes non markoviens est que l'opérateur de transfert ne préserve pas l'espace des fonctions continues.

Dans la première partie, l'étude du dual de l'opérateur de transfert mène à l'existence d'une mesure conforme pour des potentiels généraux. La principale hypothèse faite sur le système est que la pression topologique du bord de la partition de continuité est strictement inférieure à la pression totale (ceci indique que les discontinuités ne s'accumulent pas partout).

La deuxième partie est consacrée à l'étude de l'opérateur de transfert lui-même, agissant sur un espace de fonctions à variations bornées. L'étude spectrale de cet opérateur, en ajoutant une hypothèse sur l'écart au markovien du système, permet de montrer l'existence d'une mesure invariante par la transformation, absolument continue par rapport à la mesure conforme et la décroissance exponentielle des corrélations.

Dans la dernière partie, c'est le caractère α-mélangeant du système qui est essentiel pour montrer que la statistique des temps d'entrée dans un cylindre tend vers une loi exponentielle. En montrant que les mesures invariantes obtenues ne sont pas tres éloignées de mesures de Gibbs, on déduit que les fluctuations des temps de retour dans un cylindre autour de l'entropie sont lognormales.

Abstract

This thesis deals with some statistical properties of piecewise invertible, non markovian dynamical systems. The main problem for such systems is that the transfer operator does not act on the space of continuous functions.

In the first part, studying the dual of the transfer operator leads to the existence of a conformal measure for general potentials. The main hypothesis on the system is : the topological pressure of the boundary is strictly less than the total pressure (this means that the discontinuities should not accumulate everywhere).

The second part is devoted to the study of the transfer operator itself, acting on a space of functions with bounded variation. The study of the spectrum of the operator, together with a condition on the lack of markoviannity of the system, enable to prove the existence of an invariant measure, absolutely continuous with respect to the conformal one, and the exponential decay of correlations.

In the last part, the fact that the system is α-mixing is essential to prove that the statistics of entrance times in a cylinder goes asymptotically to an exponential law. Showing that the invariant measure is not too different from a Gibbs measure, the fluctuations of return times into a cylinder around the entropy turn out to be lognormal.

Mots clés : théorie ergodique, mesure conforme, état d'équilibre, pression topologique, variation bornée, temps de retour.