

FORMULAIRE PROBA STAT

Dénombrément $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ $\mathcal{A}_n^p = n^p$ $P_n = n!$ $P_n^{n_1 \dots n_r} = \frac{n!}{n_1! \dots n_r!}$ $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Théorème des probabilités totales $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Formule des probabilités composées $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A/B)$

Théorème de Bayes

$$\mathbb{P}(A_k/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(B/A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B/A_2)\mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(B/A_n)\mathbb{P}(A_n)}$$

Espérance, variance, écart-type

	v.a. discrète	v.a. continue
espérance	$\mathbb{E}(X) = \sum x_k p_k$	$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
variance	$\text{var}(X) = \sum p_k (x_k - \mathbb{E}(X))^2$ $\text{var}(X) = (\sum p_k x_k^2) - (\mathbb{E}(X))^2$	$\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x) dx$ $\text{var}(X) = (\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx) - (\mathbb{E}(X))^2$
écart-type	$\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$	$\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$

Lois usuelles discrètes

nom	univers	probabilité	espérance	variance
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	0, 1	$\mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$	$\mathbb{E}(X) = p$	$p(1 - p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	0, 1, ..., n	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$\mathbb{E}(X) = np$	$np(1 - p)$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	\mathbb{N}	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$\mathbb{E}(X) = \lambda$	λ

Lois usuelles continues (fonction de répartition $F(t) = \mathbb{P}(X < t)$)

nom	fonction de répartition	espérance	variance
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	0 si $t < 0$ $1 - e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$	$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$\Phi(t)$ (voir table)	$\mathbb{E}(X) = \mu$	σ^2

Approximations

on remplace une	par une	si
loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$	$n \geq 50$ $p \leq 0.1$ $np \leq 15$
loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$	$np \geq 15$ $n(1-p) > 15$

Statistiques c_i : centre de classe

	variable discrète	variable continue
moyenne	$m(x) = \frac{1}{n} \sum n_i x_i$	$m(x) = \frac{1}{n} \sum n_i c_i$
variance	$\text{var}(x) = \frac{1}{n} \sum n_i (x_i - m(x))^2$ $\text{var}(x) = (\frac{1}{n} \sum n_i x_i^2) - (m(x))^2$	$\text{var}(x) = \frac{1}{n} \sum n_i (c_i - m(x))^2$ $\text{var}(x) = (\frac{1}{n} \sum n_i c_i^2) - (m(x))^2$

Quartiles $]x_{k-1}, x_k]$: classe contenant le quartile de fréquence f_k et de fréquence cumulée F_k

1er quartile	$Q_1 = x_{k-1} + \frac{25 - F_{k-1}}{f_k} (x_k - x_{k-1})$
médiane	$m_e = x_{k-1} + \frac{50 - F_{k-1}}{f_k} (x_k - x_{k-1})$
3ème quartile	$Q_3 = x_{k-1} + \frac{75 - F_{k-1}}{f_k} (x_k - x_{k-1})$

Corrélation et régression (échantillon de petite taille)

covariance	$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum (x_i - m(x))(y_i - m(y))$ $\text{cov}(x, y) = \left(\frac{1}{n} \sum x_i y_i\right) - m(x) \times m(y)$
coefficient de corrélation linéaire	$\rho(x, y) = \frac{\text{COV}(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$

Droite de régression de y en x : $y = ax + b$ avec :

$$a = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)} \quad ; \quad b = m(y) - am(x)$$

Droite de régression de x en y : $x = cy + d$ avec :

$$c = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(y)} \quad ; \quad d = m(x) - cm(y)$$

Conformité à une loi avec p paramètres à estimer (α niveau de confiance, n_o effectifs observés, n_t effectifs théoriques, χ_t^2 tel que $\mathbb{P}\{X < \chi_t^2\} = \alpha$ où X suit une loi du χ^2 à $n - 1 - p$ d.d.l.)

$$\chi_o^2 = \sum \frac{(n_o - n_t)^2}{n_t} \quad (\chi_o^2 < \chi_t^2 \implies \text{la variable suit la loi voulue}) \quad (\chi_o^2 > \chi_t^2 \implies \text{la variable ne suit pas la loi voulue})$$

Processus de Poisson d'intensité λ

nom de la variable	description	loi
$N(t)$	nombre d'évènements se produisant dans l'intervalle $[0, t]$	$\mathcal{P}(\lambda t)$
T_1	instant d'apparition du premier évènement	$\mathcal{E}(\lambda)$
T_n	durée entre le (n-1)-ième et le n-ième évènement	$\mathcal{E}(\lambda)$
$S_n = T_1 + \dots + T_n$	instant d'apparition du n-ième évènement	$\Gamma(n, \lambda)$

Files d'attente (loi d'arrivée des clients $\mathcal{P}(\lambda)$, loi de la durée de service des clients $\mathcal{E}(\mu)$, $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, N taille du système, X_t nombre d'individus dans le système à l'instant t .)

notation	description	calcul	si $N = +\infty$
$\mathbb{P}\{X_t = n\}$	proba d'avoir n individus dans le système à l'instant t	$\rho^n \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$	$\rho^n (1-\rho)$
S	nombre moyen d'individus dans le système	$\rho \frac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$	$\frac{\rho}{1-\rho}$
F	nombre moyen d'individus dans la file	$\rho^2 \frac{1-N\rho^{N-1} + (N-1)\rho^N}{(1-\rho)(1-\rho^N)}$	$\frac{\rho^2}{1-\rho}$
p_N	proportion des clients qui partent	$(1-\rho) \frac{\rho^N}{1-\rho^{N+1}}$	