

Correction 1

On doit d'abord calculer moyenne et écart type de l'échantillon qui vont servir à estimer les paramètres de la loi normale. On note D la durée du trajet.

$m(D) = \frac{25 \times 5 + 35 \times 11 + \dots + 85 \times 3}{75} = 51,93$, $\text{var}(D) = \frac{25^2 \times 5 + 35^2 \times 11 + \dots + 85^2 \times 3}{75} - 51,93^2 = 210,6$ et $\sigma(D) = \sqrt{210,6} = 14,51$. Les deux hypothèses du test sont donc $H_0 : D$ suit une loi normale $\mathcal{N}(51,93; 14,51)$ et $H_1 : D$ ne suit pas cette loi normale.

On suppose H_0 et on calcule les probabilités théoriques correspondantes. Soit $Z = \frac{D-51,93}{14,51}$. Exemple

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(40 < D < 50) &= \mathbb{P}\left(\frac{40 - 51,93}{14,51} < Z < \frac{50 - 51,93}{14,51}\right) = \mathbb{P}(-0,82 < Z < -0,13) \\ &= \Phi(-0,13) - \Phi(-0,82) = \Phi(0,82) - \Phi(0,13) = 0,7939 - 0,5517 = 0,24 \end{aligned}$$

L'effectif théorique correspondant est alors $0,24 \times 75 = 18,17$. On doit regrouper les deux dernières classes en une seule afin d'avoir des effectifs supérieurs ou égaux à 5. On obtient :

durée du trajet	[20, 30[[30, 40[[40, 50[[50, 60[[60, 70[[70, 90[
nbre de trajets	5	11	17	22	12	8
proba théorique	0,051	0,140	0,242	0,264	0,183	0,102
effectif théorique	3,86	10,51	18,17	19,79	13,69	7,66

Reste à calculer le χ^2 observé $\chi_o^2 = \frac{(5-3,86)^2}{3,86} + \dots + \frac{(8-7,66)^2}{7,66} = 0,89$.

Pour le χ^2 théorique, on a une erreur de 5% et un nombre de degrés de liberté égal à $7 - 1 - 2 = 4$ puisqu'on a estimé deux paramètres pour la loi normale. La table nous donne alors $\chi_t^2 = 9,59$. On accepte donc H_0 : avec une erreur de 5%, on peut conclure que D suit une loi normale $\mathcal{N}(51,93; 14,51)$.

Correction 2

1. Soit N le nombre de commandes reçues par heure. On prend un niveau de confiance de 97,5%. On détermine la moyenne de N qui sera aussi le paramètre de la loi de Poisson utilisée.

$m(N) = \frac{0 \times 2 + 1 \times 5 + \dots + 7 \times 5}{75} = 3,84$. L'hypothèse H_0 est donc : N suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(3,84)$ et l'hypothèse $H_1 : N$ ne suit pas cette loi de Poisson. On calcule les probabilités théoriques puis les effectifs théoriques en supposant que O suit cette loi de Poisson. On doit regrouper les deux premières classes pour avoir des effectifs supérieurs à 5. Exemple : $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3,84^2}{2!} e^{-3,84} = 0,158$. L'effectif correspondant est donc $0,158 \times 75 = 11,89$. On obtient après regroupement

nb de commandes	0, 1	2	3	4	5	6	7
effectifs	7	12	12	17	12	10	5
proba. théoriques	0,126	0,158	0,203	0,195	0,15	0,096	0,053
effectifs théoriques	9,41	11,89	15,21	14,60	11,22	7,18	3,94

On calcule alors le χ_{obs}^2

$$\chi_{obs}^2 = \frac{7 - 9,41}{9,41} + \dots + \frac{(5 - 3,94)^2}{3,94} = 3,142$$

Le nombre de degrés de liberté est $7 - 1 - 1 = 5$, puisqu'on a 7 classes après regroupement et qu'on a estimé un paramètre pour la loi de Poisson. La table du χ^2 nous donne $\chi_{th}^2 = 12,8$. Comme $\chi_{obs}^2 < \chi_{th}^2$, on accepte H_0 avec une erreur de 2,5%. On peut donc conclure que la loi des arrivées est une loi de Poisson $\mathcal{P}(3,84)$.

- 2.a. Soit N_t le nombre de commandes reçues en t heures. N_1 suit une loi de Poisson de paramètre 4 donc $\mathbb{P}(N_1 \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(N_1 < 3) = 1 - e^{-4}(\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!}) = 0,76$
- 2.b. Une journée dure trois heures dont le nombre de commandes reçues en une journée est N_3 qui suit une loi de Poisson de paramètre $3 \times 4 = 12$ donc $\mathbb{E}(N_3) = 12$.
- 2.c. $\mathbb{P}(N_3 < 5) = e^{-12}(\frac{12^0}{0!} + \frac{12^1}{1!} + \frac{12^2}{2!} + \frac{12^3}{3!} + \frac{12^4}{4!}) = 0,0076$
- 2.d. La durée T entre deux commandes successives suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(4)$. Donc $\mathbb{P}(T > 1) = 1 - \mathbb{P}(T \leq 1) = 1 - (1 - e^{-4}) = e^{-4} = 0,0183$ et ceci ne dépend pas du numéro de la commande que l'on regarde.
- 2.e. Deux solutions qui reviennent au même, ou bien $\mathbb{P}(T > 1) = 0,01$, ou bien $\mathbb{P}(N_1 = 0) = 0,01$, sachant que N_1 suit une loi de Poisson de paramètre λ et T suit une loi exponentielle de paramètre λ , on a donc $\mathbb{P}(N_1 = 0) = \mathbb{P}(T > 1) = e^{-\lambda} = 0,01$ d'où $\lambda = -\ln(0,01) = 4,61$.

Correction 3

L'idée est de raisonner en nombre de rabais plutôt qu'en nombre de clients. Le nombre de rabais accordés forme un processus de Poisson d'intensité 1/13 par minute.

1. Le nombre $N(60)$ de rabais en une heure suit une loi de Poisson de paramètre 60/13 donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N(60) > 5\} &= 1 - \mathbb{P}\{N(60) \leq 5\} \\ &= 1 - e^{-60/13} \left(\frac{(60/13)^0}{0!} + \frac{(60/13)^1}{1!} + \frac{(60/13)^2}{2!} + \frac{(60/13)^3}{3!} + \frac{(60/13)^4}{4!} + \frac{(60/13)^5}{5!} \right) = 0,32 \end{aligned}$$

2. Le nombre $N(480)$ de rabais accordés en une journée de 8 heures suit une loi de Poisson de paramètre 480/13. Sa moyenne est donc $480/13 = 36,92$.
3. L'instant d'apparition T_1 du premier rabais suit une loi exponentielle de paramètre 1/13 donc $\mathbb{P}\{5 < T_1 < 10\} = \mathbb{P}\{T_1 < 10\} - \mathbb{P}\{T_1 < 5\} = 1 - e^{-10/13} - (1 - e^{-5/13}) = 0,22$.

Correction 4

On note X_t le nombre de malades arrivant dans l'intervalle $[0, t]$ où t est un nombre d'heures. On rappelle que X_t suit une loi de Poisson de paramètre $5,6t$.

1. X_1 est le nombre de malades qui arrivent en une heure. X_1 suit une loi de Poisson de paramètre 5,6 donc $\mathbb{P}(X_1 \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(X_1 < 4) = 1 - e^{-5,6}(\frac{5,6^0}{0!} + \dots + \frac{5,6^3}{3!}) = 0,809$.
2. Le nombre de malades arrivant en une journée est X_{24} qui suit une loi de Poisson de paramètre $24 \times 5,6 = 134,4$. On a donc $\mathbb{E}(X_{24}) = 134,4$.
3. Entre 12 et 14 heures, il s'écoule deux heures, on doit donc utiliser X_2 qui suit une loi de Poisson de paramètre $2 \times 5,6 = 11,2$. $\mathbb{P}(X_2 < 5) = e^{-11,2}(\frac{11,2^0}{0!} + \dots + \frac{11,2^4}{4!}) = 0,013$.
4. La durée T entre l'arrivée de deux malades successifs suit une loi exponentielle de paramètre 5,6, donc $\mathbb{P}(T > \frac{1}{2}) = 1 - \mathbb{P}(T \leq \frac{1}{2}) = e^{-\frac{5,6}{2}} = 0,0608$.
5. Si l'intensité est λ , le nombre de malades qui arrivent en une demi heure est $X_{\frac{1}{2}}$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{2}$ donc $\mathbb{P}(X_{\frac{1}{2}} = 0) = e^{-\frac{\lambda}{2}} = 0,01$, on a donc $\lambda = -2\ln(0,01) = 9,21$.

Correction 5

La moyenne se calcule ainsi $m = \frac{0 \times 2 + 1 \times 9 + \dots + 11 \times 0}{100} = 4,93$.

On calcule les effectifs théoriques associés à une loi de Poisson de paramètre $m = 4,93$, c'est à dire qu'on calcule les probabilités $\mathbb{P}\{X = 0\} \dots \mathbb{P}\{X = 11\}$ et on les multiplie par l'effectif total 100; on obtient :

effectif theorique	0,72	3,56	8,78	14,43	17,79	17,54	14,41	10,15	6,25	3,43	1,69	0,76
effectif oservé	2	9	14	19	20	15	11	5	3	1	1	0

on calcule alors $\chi_0^2 = 23,61$ et si on prend un confiance égale à 0,95, on trouve $\chi_t^2 =$ en regardant dans la table pour 0,05 et pour $12 - 1 - 1 = 10$ degrés de liberté, donc $\chi_t^2 = 18,3$. On observe que $\chi_t^2 < \chi_0^2$ donc on ne peut pas conclure avec un risque d'erreur de 5% que la loi suivie est une loi de Poisson de paramètre 4,93.

Correction 6

1. Il s'agit d'un test du χ^2 de conformité à une loi théorique.

H_0 : D suit une loi $\mathcal{E}(\frac{1}{2,5})$.

H_1 : D ne suit pas une loi $\mathcal{E}(\frac{1}{2,5})$.

Pour faire le test, on suppose que H_0 est vraie. Calculons alors les probabilités et effectifs théoriques.

Par exemple; pour la première classe : $\mathbb{P}(0 < D < 1) = \mathbb{P}(D < 1) - \mathbb{P}(D < 0) = (1 - e^{-1/2,5}) - (1 - e^{-0/2,5}) = 0,329$. Puisque l'effectif total de l'échantillon est 150, l'effectif théorique correspondant à la première classe est $150 \times 0,329 = 49,45$. Pour les autres classes, on obtient

classe	[0,1[[1,2[[2,3[[3,4[[4,7[
effectifs	54	31	27	11	27
effectifs théoriques	49,45	33,15	22,22	14,89	21,16

On calcule alors le χ^2 théorique

$$\chi_t^2 = \frac{(54 - 49,45)^2}{49,45} + \dots + \frac{(27 - 21,16)^2}{21,16} = 4,21$$

Le nombre de degrés de liberté est $n - 1 - p = 5 - 1 - 0 = 4$ (car on n'a estimé aucun paramètre).

Pour une erreur de 0,025 et 4 degrés de liberté, la table nous donne $\chi_o^2 = 11,1$. Le χ^2 calculé n'est pas assez grand pour mettre en évidence une différence par rapport à la loi exponentielle donc on accepte H_0 avec 2,5% d'erreur.

2.a. soit N_t le nombre de fraudes pendant un intervalle de durée t minutes. La durée D entre deux fraudes successives suit une loi exponentielle de paramètre l'intensité du processus, donc l'intensité du processus est $\lambda = \frac{1}{2,5}$.

2.b. En une heure, il y a N_{60} fraudes et N_{60} suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{60}{25}$ donc

$$\mathbb{P}(N_{60} < 6) = e^{-\frac{60}{25}} \left(\frac{(\frac{60}{25})^0}{0!} + \dots + \frac{(\frac{60}{25})^5}{5!} \right) = 0,964$$

2.c. En 10 minutes, il y a N_{10} fraudes et N_{10} suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{10}{25}$ donc

$$\mathbb{P}(N_{60} > 3) = 1 - \mathbb{P}(N_{60} \leq 3) = 1 - e^{-\frac{10}{25}} \left(\frac{(\frac{10}{25})^0}{0!} + \dots + \frac{(\frac{10}{25})^3}{3!} \right) = 0,00078$$

2.d. $\mathbb{P}(D \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(D < 2) = 1 - (1 - e^{-1/2,5}) = e^{-1/2,5} = 0,67$.