Université de Picardie Jules Verne **2010-2011**

INSSET de St Quentin **Corrigé exam mardi 11 janvier 2011**

Correction 1

1. Si D suit une loi normale, on commence par identifier les paramètres. On calcule donc la moyenne et l'écart-type de l'échantillon. On trouve $m = 76,85$ et $s = 14,29$. On va faire un test du χ^2 pour décider si on peut admettre que D suit une loi normale ou non. Pour cela, on doit calculer les effectifs théoriques de chaque classe en supposant que D suit la loi $\mathcal{N}(76,85; 14,29)$. Par exemple, pour la première classe $[50, 60[$, l'effectif théorique est l'effectif total (100) multiplié par la probabilité $\mathbb{P}(50 < D < 60)$. Soit $Z = \frac{D-76,85}{14,29}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(50 < D < 60) &= \mathbb{P}(\tfrac{50-76,85}{14,29} < Z < \tfrac{60-76,85}{14,29}) = \mathbb{P}(-1,88 < Z < -1,18)\\ &= \Phi(-1,18) - \Phi(-1,88) = \Phi(1,88) - \Phi(1,18) = 0,9699 - 0,8810 = 0,0889\end{aligned}$$

l'effectif théorique est donc $100 \times 0,0889 = 8,89$. On procède de même pour les autres classes et on obtient :

demande D	[50,60[	[60,70[	[70,80[	[80,90[	[90,100[	[100,120[	Total
effectif observé	11	22	31	20	9	7	100
effectif théorique	8,89	19,65	27,11	23,38	12,59	5,12	100

On calcule ensuite le χ^2 observé

$$\chi_o^2 = \frac{(11-8,89)^2}{8,89} + \dots \frac{(7-5,12)^2}{5,12} = 3,52$$

On compare cette valeur à la valeur trouvée dans la table de la loi du χ^2 pour une erreur $\alpha = 0,05$ et un nombre de degrés de liberté $\nu = 6 - 1 - 2 = 3$ (puisqu'on a 6 classes et on a estimé deux paramètres). Cette valeur est $\chi_t^2 = 7,82 > 3,52$. On peut donc conclure avec 5% d'erreur que D suit cette loi normale.

2.a. Soit $Z = \frac{D-76,8}{14,3}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(65 < D < 90) &= \mathbb{P}(\tfrac{65-76,8}{14,3} < Z < \tfrac{90-76,8}{14,3})\\ &= \mathbb{P}(-0,83 < Z < 0,92) = \Phi(0,92) - 1 + \Phi(0,83) = 0,8212 - 1 + 0,7967 = 0,62\end{aligned}$$

2.b. Puisque l'entrepôt fonctionne 6 jours sur 7, Y est la somme de 6 lois normales indépendantes de même loi $\mathcal{N}(76,8; 14,3)$. Donc Y suit une loi $\mathcal{N}(460,8; 35,03)$. On note $T = \frac{Y-460,8}{35,03}$.

2.c. $\mathbb{P}(460,8 < Y < 500) = \mathbb{P}(Y < 500) - 0,5 = \Phi(\frac{500-460,8}{35,03}) - 0,5 = \Phi(1,12) - 0,5 = 0,8687 - 0,5 = 0,3687$.

2.d. Il y a rupture de stock si la demande pour une semaine Y est supérieure au stock de sécurité s. On veut donc $\mathbb{P}(Y > s) = 0,02$ ou encore $\mathbb{P}(T > t) = 0,02$ avec $t = \frac{s-460,8}{35,03}$. Un dessin montre que t est positif et que $\Phi(t) = 1 - 0,02 = 0,98$. Une lecture inverse dans la table de la loi normale donne $t = 2,05$ et donc $s = 2,05 \times 35,03 + 460,8 = 532.61$. On doit donc avoir un stock minimal de 533 pièces.

Correction 2

Notons N_t le nombre d'appels pendant un intervalle de temps de longeur t minutes. Par définition d'un processus de Poisson, N_t suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(0,4t)$.

1. Le nombre d'appels en une minute N_1 suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(0,4)$ donc $\mathbb{P}(N_1 > 2) = 1 - \mathbb{P}(N_1 = 0) - \mathbb{P}(N_1 = 1) - \mathbb{P}(N_1 = 2) = 1 - e^{-0,4}(1 + 0,4 + \frac{0,4^2}{2}) = 0,0079$.

2. Le nombre d'appels en 30 minutes N_{30} suit une loi $\mathcal{P}(12)$ donc $\mathbb{P}(X \leqslant 5) = e^{-12}(1+12+\ldots+\frac{12^5}{5!}) = 0,02$.
3. Dans cette question, on peut raisonner en nombre d'appel en un minute N_1 ou en durée entre deux appels consécutifs T qui suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(0,4)$. La probabilité cherchée vaut $\mathbb{P}(N_1 = 0) = \mathbb{P}(T > 1) = e^{-0,4} = 0,67$.
4. Le nombre d'appels reçus en dix minutes N_{10} suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(4)$. Sa variance vaut le paramètre 4 et l'écart-type vaut $\sqrt{4} = 2$.
5. Le nombre d'appels en douze minutes N_{12} suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(4,8)$. On peut aussi utiliser la durée T entre deux appels successfis. La réponse est $\mathbb{P}(T \leqslant 12) = 1 - e^{0.4\times 12} = 0.992$. On aurait aussi pu calculer $1 - \mathbb{P}(N_{12} = 0)$.

Correction 3
Le nombre N de personnes souhaitant se faire vacciner dans la population française suit une loi binomiale $\mathcal{B}(60000000; 0,7)$ (c'est la répétition 60 millions de fois de façon indépendante d'une expérience de Bernoulli de paramètre 0,7. Les conditions étant vérifiées ($60000000 \times 0,7 > 5$ et $60000000 \times 0,3 > 5$), on peut remplacer cette loi binomiale par une loi normale $\mathcal{N}(42000000; 3549,6)$. Soit $Z = \frac{N-42000000}{3549,6}$. Soit x le nombre de vaccins cherché. Ce nombre sera suffisant si $N < x$. On veut donc $\mathbb{P}(N < x) = 0,99$ ou encore $\mathbb{P}(Z < z) = 0,99$ avec $z = \frac{x-42000000}{3549,6}$. Un dessin montre que z est positif et que $\Phi(z) = 0,99$. Une lecture inverse dans la table de la loi normale donne $z = 2,33$ et $x = 42000000 + 2,33 \times 3549,6 = 42008271$.

Correction 4
1. $\mathbb{P}(M_1 \cup M_2 \cup M_3) = 1 - \mathbb{P}(\bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3) = 1 - \mathbb{P}(\bar{M}_1) \times \mathbb{P}(\bar{M}_2) \times \mathbb{P}(\bar{M}_3) = 1 - 0,98 \times 0,95 \times 0,9 = 0,16$ (on a utilisé l'indépendance comme dans tout le reste de l'exercice).
2. On note A l'arrêt de la chaîne de production. ($A = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ et $\mathbb{P}(A) = 0,16$ d'après la question précédente). On doit calculer $\mathbb{P}(M_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3/A) = \frac{\mathbb{P}(M_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3 \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$ mais $M_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3 \subset A$ donc $M_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3 \cap A = M_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3$. Ce sera le cas pour tous les cas de panne considérés dans la suite. Par conséquent, $\mathbb{P}(M_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3/A) = \frac{\mathbb{P}(M_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0,02 \times 0,95 \times 0,9}{0,16} = 0,11$.
$\mathbb{P}(M_1 \cap M_2 \cap \bar{M}_3/A) = \frac{\mathbb{P}(M_1 \cap M_2 \cap \bar{M}_3)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0,02 \times 0,05 \times 0,9}{0,16} = 0,0055$.
3. Les valeurs prises par X sont 2500, 1800, 4500, 4300, 7000, 6300, 8800. Les probabilités correspondantes sont :
$\mathbb{P}(X = 2500) = \mathbb{P}(M_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3/A) = 0,11$ (cf 2.)
$\mathbb{P}(X = 7000) = \mathbb{P}(M_1 \cap \bar{M}_2 \cap M_3/A) = \frac{0,02 \times 0,95 \times 0,1}{0,16} = 0,012$ etc... On obtient la loi suivante

X	1800	2500	4300	4500	6300	7000	8800
$\mathbb{P}$	$0,28$	$0,11$	$0,0056$	$0,58$	$0,03$	$0,012$	$0,00063$

On remarquera qu'en arrondissant, la somme des probabilités dépasse de peu 1.
La moyenne est $\mathbb{E}(X) = 1800 \times 0,28 + \ldots + 8800 \times 0,00063 = 3692$. 4. $\mathbb{P}(X > 6000) = \mathbb{P}(X = 6300) + \mathbb{P}(X = 7000) + \mathbb{P}(X = 8800) = 0,03 + 0,012 + 0,00063 = 0,043$.