UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : **Mathématiques**

présentée par

Fabien DURAND

intitulée

Récurrence en Dynamique Topologique d'Entropie Nulle

Soutenue le lundi 15 novembre 2004

Après avis des rapporteurs :
François BLANCHARD
Ai-Hua FAN
Boris SOLOMYAK

Devant le jury composé de :
Hedi DABOUSSI
Ai-Hua FAN
Sébastien FERENCZI
Bernard HOST
Martine QUEFFÉLEC
Christian SKAU
Jean-Paul THOUVENOT

2

.

Remerciements.

Je remercie mes parents, mes frères et Christelle qui m'ont accompagnés et soutenus inconditionnellement.
Je remercie mes amies et amis coureurs et méreux pour leur chaleur (picarde) et pour tous les bols d'air pris en commun.
Je remercie les rapporteurs et les membres du jury pour le temps qu'ils m'ont accordé et pour leur présence.

Table des matières

Introduction

Ce travail est une étude qualitative et quantitative du phénomène de récurrence (au sens de Poincaré) dans les systèmes dynamiques d'entropie nulle. Nous nous intéressons principalement aux dynamiques topologiques minimales définies sur des ensembles de Cantor. Les aspects ergodiques et combinatoires de la récurrence seront souvent abordés et étudiés.

La caractère "quasi-universel" de la récurrence dans les systèmes dynamiques a été mis en évidence en 1899 par Henri Poincaré :

Etant donné un espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$, $T : X \to X$ une application mesurable préservant μ et $B \in \mathcal{B}$, la fonction $r_B : B \to \mathbb{N}$ définie par

$$r_B(x) = \inf\{k \geq 1; T^k x \in B\}$$

est définie pour μ-presque tout $x \in B$.

Le théorème ergodique de Birkhoff (1931) a apporté des connaissances quantitatives sur cette notion.
La notion d'entropie a été définie en 1948 par Shannon en théorie de l'information. Elle fut introduite en théorie ergodique par Kolmogorov (1958). L'entropie donne, grossièrement parlant, le "caractère dominant" du nombre d'orbites différentes observées pendant une durée n dans un système donné. Par exemple, si l'entropie vaut h ce nombre d'orbite est environ e^{hn}. Lorsque l'entropie est nulle ceci ne nous apporte aucune information sur le nombre de ces orbites.
En 1993 Ornstein et Weiss ont lié de façon explicite l'entropie à la fonction de récurrence. Comme dans le cas précédent, lorsque l'entropie est positive, elle nous donne le caractère dominant de la fonction de récurrence et ne nous donne aucune information lorsqu'elle est nulle.
L'une des motivations de ce travail a été de chercher à comprendre les fonctions de récurrence des systèmes d'entropie nulle et surtout à utiliser ces nouvelles connaissances.

Un système dynamique donné peut souvent se définir (ou se représenter) de plusieurs façons différentes. Un type de représentation est souvent lié à un type de problème. Une représentation qui a prouvée son efficacité est celle des suites de partitions en tours de Rohlin. Parfois, sur ces représentations peuvent être vues (ou lues) des propriétés ergodiques du système. Par exemple, lorsque le nombre de tours est borné (système de rang fini) alors l'entropie est nulle et le nombre de mesure ergodique est fini. L'avantage que procure cette représentation est qu'elle décrit relativement précisément les fonctions de récurrence des atomes des partitions.
En 1981, A. Vershik eut l'idée de représenter l'imbrication des tours de Rohlin successives par des diagrammes de Bratteli. Grâce à ces diagrammes il a défini une

nouvelle classe de systèmes dynamiques : les transformations adiques (définies sur des diagrammes de Bratteli). Il a montré que tout système ergodique pouvait se représenter par une transformation adique.
Ces représentations sont efficaces dans un contexte mesuré, mais pour des dynamiques continues elles ne permettent de faire la différence entre un système expansif et un système équicontinue (par exemple entre un système Sturmien et une rotation de mêmes paramètres).
En 1992, R. Herman, I. Putnam et C. Skau ont repris la construction de Vershik dans un contexte topologique. Les transformations adiques étant définies sur des ensembles de Cantor (définis par des diagrammes de Bratteli), les systèmes représentables par cette construction doivent être définis sur des ensembles de Cantor. De plus, ces constructions faisant intervenir les fonctions de récurrence, ces dernières doivent être définies partout et non pas presque partout. Ce qui revient à peu de choses près à ne considérer que des dynamiques continues et minimales (i.e. dynamiques où toutes les orbites sont denses).
Les trois auteurs précédants ont montré que tout système dynamique minimal défini sur un ensemble de Cantor est topologiquement conjugué à une transformation adique topologique (maintenant appelé “système de Bratteli-Vershik”). Ces représentations sont au coeur des caractérisations des équivalences orbitales prouvées par T. Giordano, I. Putnam et C. Skau en 1995.
L'atout majeur des diagrammes de Bratteli (et donc des systèmes de Bratteli-Vershik) est la combinatoire qu'ils proposent. L'importance des sous-shifts dans la littérature est surtout dûe à sa combinatoire aisément manipulable. Les diagrammes de Bratteli présentent le même type de facilité mais pour une plus large classe de systèmes dynamiques. La fonction de récurrence r_B, où B est un ouvert fermé, se décrit et se manipule très précisément dans un système de Bratteli-Vershik. Ce document le mettra en évidence.

Deux autres notions importantes issues de la récurrence sont les systèmes induits et le codage de sous-shifts par des mots de retour. Ce dernier outil est particulièrement efficace là où les diagrammes de Bratteli le sont moins, à savoir, par exemple, pour traiter des problèmes liés aux facteurs topologiques.

Dans ce travail, je me suis attaché a étudier la récurrence en entropie nulle sous différents aspects et d'en donner des applications à plusieurs problèmes de nature différente.

Ce document comporte six chapitres. Le premier est dédié aux définitions et aux notations que nous utiliserons.

Le chapitre suivant est consacré aux systèmes dynamiques linéairement récurrents (LR). Cette notion a été d'abord définie pour les sous-shifts dans l'article 4 (qui fait partie de ma thèse de doctorat, voir la liste des travaux). Ces systèmes se définissent par leurs fonctions de récurrence sur des cylindres : un sous-shift minimal (X, T) est LR s'il existe une constante K telle que pour tout mot u apparaissant dans un élément de X on a :

$$r_{[u]}(x) \leq K|u|,$$

pour tout $x \in X$, où $[u]$ désigne le cylindre engendré par u et $|u|$ la longueur de u. Ces systèmes ont un comportement très proche des systèmes substitutifs. Ils sont

minimaux, uniquement ergodiques, non-fortement mélangeants et de complexité symbolique sous-affine (donc d'entropie nulle).
J'ai par la suite poursuivi l'étude de ces sous-shifts dans les articles 5 et 5 bis. Nous montrons, entre autres résultats, qu'ils n'ont qu'un nombre fini (aux isomorphismes près) de facteurs qui sont des sous-shifts non périodiques. Nous en donnons également une caractérisation en termes de produits infinis de morphismes appartenant à un ensemble fini.
Dans l'article 11 nous avons étendu cette notion aux systèmes dynamiques définis sur des ensembles Cantor par l'intermédiaire de tours de Rohlin. Nous avons donné une condition suffisante d'existence pour qu'un nombre complexe soit une valeur propre de l'opérateur $U_T : L^2 \to L^2$, $Uf = f \circ T$, ayant une fonction propre continue. Nous avons montré dans l'article 15 que cette condition était nécessaire. Dans l'article 11 nous avons également donné une condition nécessaire d'existence pour qu'un nombre complexe soit une valeur propre de U_T.

Le chapitre 3 donne des représentations de Bratteli-Vershik de systèmes "classiques" : Odomètres, systèmes dynamiques Sturmiens, de Toeplitz, substitutifs, linéairement récurrents, et version symbolique des échanges d'intervalles.

Dans le chapitre 4 nous utilisons la combinatoire des diagrammes de Bratteli dans l'étude des odomètres, des systèmes substitutifs et des systèmes Sturmiens. Nous montrons (article 6) qu'un système Sturmien est isomorphe à un système minimal (X, T) donné si et seulement s'il lui est équivalent orbitalement et Kakutani équivalent. Dans les articles 7 et 12 nous menons une étude fine des temps d'entrée et de retour des systèmes substitutifs et des odomètres. La structure matricielle des diagrammes de Bratteli y est d'une grande utilité. Le taux de récurrence des rotations et systèmes Sturmiens est étudié dans l'article 14.

Dans le chapitre 5 nous étudions trois thèmes distincts, tous liés d'une façon différente à la récurrence.
Tout d'abord nous nous intéressons aux sommes ergodiques pondérées. Nous l'avons dit plus haut les sommes ergodiques dans le Théorème de Birkhoff donnent des renseignements quantitatifs sur la récurrence. Dans l'article 8 nous étudions ces sommes auxquelles nous appliquons des pondérations déterministes.
Les temps de retour sont utiles pour coder les systèmes dynamiques. Nous utilisons un codage de ce type afin d'étudier l'existence d'extensions symboliques presque 1-1 (article 9).
Le chaos de Li-Yorke dans un système (X, T) est une notion liée à la récurrence de points de $(X \times X, T \times T)$ sur la diagonale $\{(x, x); x \in X\}$. Le système (X, T) est chaotique au sens de Li-Yorke s'il existe un ensemble non-dénombrable de points de $X \times X$ retournant infiniment souvent arbitrairement près de la diagonale et infiniment souvent loin de la diagonale. Nous avons étudié le chaos de Li-Yorke dans certains systèmes substitutifs de façon à obtenir des comportements atypiques par rapport à ceux connus jusqu'alors (article 13).

Le chapitre 6 porte sur la reconnaissabilité d'ensembles d'entiers par des automates et sur la généralisation "substitutive" de ce problème, c'est à dire sur les théorèmes de type Cobham. La récurrence y joue un rôle majeur. Une étape importante dans les résultats de type Cobham pour les systèmes de numération consiste à montrer que les suites d'entiers considérées sont syndétiques, ce qui est une forme de récurrence. De plus, la clé de voûte des travaux de ce chapitre (articles 2, 3 et 10) tient dans le fait que : si (X, T) est un système substitutif minimal, alors la famille de ses systèmes induits sur des cylindres est finie à des isomorphismes près (article 1).

CHAPITRE 1

Définitions et notations

Dans cette section sont rappelées les définitions et les notations classiques présentes dans ce document.

Mots, morphismes et substitutions.

Soit A un alphabet fini. On note A^* le monoïde libre engendré par A. Soit $x = x_0x_1 \cdots x_{n-1}$, $x_i \in A$, $0 \leq i \leq n-1$, un *mot* de A^*, $|x|$ $(= n)$ désigne la longueur du mot x. Les éléments $x = x_0x_1 \cdots$ de $A^{\mathbb{N}}$ sont appelés *suites*. Soient $0 \leq i \leq j$ deux entiers, on note $x[i,j]$ le mot $x_ix_{i+1} \cdots x_j$. Les *occurrences* d'un mot u dans x sont les entiers i tels que $x_{[i,i+|u|-1]} = u$. Une *lacune* de u dans x est la différence entre deux occurrences successives de u dans x. Nous dirons que x est *uniformément récurrente* si elle est à lacunes bornées pour tout u ayant une occurrence dans x. Le *langage* de x est l'ensemble des mots ayant une occurrence dans x ; on le note $L(x)$. Le nombre de mots de longueur n ayant une occurrence dans x est noté $p_x(n)$. La suite x est *ultimement périodique* s'il existe un mot u et un mot non-vide v tels que $x = uvv \cdots$, et périodique si $|u| = 0$.
Soit B un second alphabet. Un *morphisme* est une application τ de A dans B^*. On dit qu'il est *lettre à lettre* lorsque $\tau(A) \subset B$. On étend τ par concaténation en une application de A^* dans B^*. Si $\tau(A)$ ne contient pas le mot vide on peut étendre τ par concaténation en une application de $A^{\mathbb{N}}$ dans $B^{\mathbb{N}}$. Nous noterons toutes ces trois applications τ.
Une *substitution* est un morphisme $\sigma : A \to A^*$ telle que $\lim_{n\to+\infty} |\sigma^n(a)| = +\infty$ pour toute lettre a de A. Un point fixe de σ est une suite $x \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\sigma(x) = x$. Nous supposerons que toutes les lettres de A apparaissent dans x. Nous notons $L(\sigma)$ le langage de x. (Voir [**Qu**] pour plus de détails.)
A la substitution σ est associée une matrice carrée à coefficients entiers $M = (m_{i,j})_{i,j\in A}$ où $m_{i,j}$ est le nombre d'occurrences de i dans $\sigma(j)$. Cette matrice a une valeur propre réelle, α, supérieure en module à toutes les autres (voir [LM]). L'image par un morphisme lettre à lettre d'un point fixe de σ est dite *suite α-substitutive*. Une substitution est de *longueur constante* si les images des lettres ont toutes la même longueur. Si cette longueur est p, on montre sans difficulté que p est la plus grande valeur propre de M. Une substitution est dite *primitive* lorsque sa matrice l'est.

Systèmes dynamiques.

Dans ce qui suit nous considérerons les deux types de systèmes dynamiques suivants :

• Systèmes dynamiques mesurés (s.d.m.) : $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ où
– $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace de probabilité ;

– $T : X \to X$ est une application mesurable ;
– μ est une mesure T-invariante : Pour tout $B \in \mathcal{B}$ on a

$$\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B);$$

• Systèmes dynamiques topologiques (s.d.t.) : (X, T) où
– X est un espace métrique compact et
– $T : X \to X$ est une application continue.

Dans la majorité des thèmes abordés dans ce travail c'est le cas topologique qui monopolisera notre attention. Lorsque nous parlerons de système dynamique nous supposerons implicitement qu'il s'agit d'un s.d.t.. Par conséquent nous ométrons les termes "topologique" et "continue" lorsque nous devrions les employer.
Un *ensemble de Cantor* (ou *Cantor*) est un espace métrique compact sans point isolé ayant une base de sa topologie constituée d'ouverts-fermés. Lorsque X est un Cantor nous dirons que (X, T) est un système dynamique de Cantor.
Un système dynamique (X, T) est dit *minimal* si les seuls fermés T-invariants sont X et l'ensemble vide.
Le système dynamique (Y, S) est un *facteur* du système dynamique (X, T) s'il existe une application surjective $\phi : X \to Y$ tel que $\phi \circ S = S \circ \phi$ (ϕ est appelé application facteur ou simplement facteur). Le système dynamique (X, T) est appelé *extension* de (Y, S). Le facteur et l'extension sont dits *presque 1-1* si l'ensemble des points de Y n'ayant qu'une préimage est un G_δ dense de Y. Dans le cas où (Y, S) est minimal il suffit qu'il existe un point de Y ayant une unique préimage. Si ϕ est injective alors ϕ est un isomorphisme de système dynamique et les deux systèmes sont isomorphes.
Le s.d.m. $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ a pour facteur mesurable $(Y, \mathcal{A}, \nu, S)$ s'il existe une application mesurable $\pi : X \to Y$ telle que

$$\pi\mu = \nu \text{ et } S \circ \pi(x) = \pi \circ T(x) \text{ pour } \mu - \text{presque tout } x \in X.$$

Si de plus π est injective sur un ensemble de mesure égale à 1 nous dirons que $(Y, \mathcal{A}, \nu, S)$ est isomorphe en mesure à $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$.
Soient (X, S) un système dynamique de Cantor minimal et $U \subset X$ un ouvert-fermé. La minimalité implique que $r_U(x) = \min\{n > 0; S^n(x) \in U\}$ est finie pour tout $x \in X$. Par conséquent nous pouvons définir $S_U : U \to U$, la transformation induite sur U par S, par $S_U(x) = S^{r_U(x)}$. La paire (U, S_U) est un système dynamique de Cantor minimal. C'est le système induit de (X, S) sur U.
Une grande partie de ce travail s'occupe des systèmes dynamiques appelés "sous-shifts". Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Soit A un alphabet fini.
Munissons $A^{\mathbb{K}}$ de la topologie produit infini des topologies discrètes. Un *sous-shift* défini sur l'alphabet A est un système dynamique de Cantor $(X, T_{/X})$ où X est un fermé T-invariant de $A^{\mathbb{K}}$ où $T : A^{\mathbb{K}} \to A^{\mathbb{K}}$ est le décalage à gauche (ou "shift") : $T((x_n; n \in \mathbb{K})) = (x_{n+1}; n \in \mathbb{K})$ pour tout $(x_n; n \in \mathbb{K}) \in A^{\mathbb{K}}$.
Nous appelons *langage de* X l'ensemble $L(X) = \{x_{[i,j]}; x \in X, i \leq j\}$. Soit $x \in A^{\mathbb{K}}$. Posons $\Omega(x) = \{y \in A^{\mathbb{K}}; y_{[i,j]} \in L(x), \forall [i, j] \subset \mathbb{K}\}$. Le couple $(\Omega(x), T)$ est un sous-shift, c'est le sous-shift engendré par x.
Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$. Soit u et v dans $L(X)$. L'ensemble $[u.v]_X = \{x \in X; x_{[-|u|,|v|-1]} = uv\}$ est appelé *cylindre*. La famille des cylindres est une base de la topologie de X. Lorsque cela ne créera pas de confusion nous écrirons $[u.v]$ et T en lieu et place

de $[u.v]_X$ et $T_{/X}$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{N}$ nous avons des définitions, des propriétés et des conventions analogues.

Nous donnons brièvement dans ce qui suit les définitions des principaux systèmes dynamiques qui seront abordés avec plus de détails dans les chapitres suivants.

Systèmes dynamiques substitutifs.

Soit x un point fixe d'une substitution σ. Le sous-shift (X, T) engendré par x est appelé *sous-shift substitutif*. Ce sous-shift est minimal si et seulement si σ est primitive.
Supposons σ primitive. Alors, (X, T) est d'entropie nulle, uniquement ergodique et n'est pas fortement mélangeant. L'entropie nulle se déduit du fait que la complexité de x est sous-affine (voir [**Qu**]).

Systèmes dynamiques Sturmiens.

Soit $0 < \alpha < 1$ un nombre irrationnel. Définissons l'application $R_\alpha : [0,1[\to [0,1[$ par $R_\alpha(t) = t + \alpha \pmod 1$ et l'application $I_\alpha : [0,1[\to \{0,1\}$ par $I_\alpha(t) = 0$ si $t \in [0, 1-\alpha[$ et $I_\alpha(t) = 1$ sinon. Notons Ω_α la fermeture topologique de l'ensemble $\left\{ \left(I_\alpha\left(R_\alpha^n(t)\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \;\middle|\; t \in [0,1[\;\right\}$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Le sous-shift (Ω_α, S) est appelé *sous-shift Sturmien* engendré par α et ses éléments sont appelés *suites Sturmiennes*. Il existe un facteur topologique (voir [**HM**]) $\phi : (\Omega_\alpha, S) \to ([0,1[\,, R_\alpha)$ tel que $\left|\phi^{-1}(\{\beta\})\right| = 2$ si $\beta \in \{ n\alpha \mid n \in \mathbb{Z} \}$ et $\left|\phi^{-1}(\{\beta\})\right| = 1$ sinon. Par conséquent ϕ est un isomorphisme mesurable. Les propriétés de ϕ impliquent que (Ω_α, S) est non-périodique, minimal, uniquement ergodique et d'entropie nulle (voir [**Fog**]).

Systèmes dynamiques de Toeplitz.

Soit A un alphabet fini. Une suite de Toeplitz x est un élément de $A^{\mathbb{Z}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $p \geq 1$, vérifiant

$$x_{n+kp} = x_n \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Un système dynamique de Toeplitz est un sous-shift engendré par une suite de Toeplitz. Un système de Toeplitz est toujours minimal (voir [**Wi**]).

Échanges d'intervalles.

Soit $\zeta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_k)$ une partition du segment $[0,1[$ en $k \geq 2$ intervalles disjoints de la forme $[a,b[$ numérotés de la gauche vers la droite. Un échange d'intervalles est une application $T : [0,1[\to [0,1[$ qui est une translation sur chacun des Δ_i telle que $\{T\Delta_i = \Delta'_i; i \in \{1,\ldots,k\}\}$ est une partition de $[0,1[$. On remarque qu'il existe une permutation $\pi : \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,k\}$ telle que les Δ'_i sont rangés dans l'ordre croissant $\Delta'_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, \Delta'_{\pi^{-1}(k)}$. L'application T est continue à droite mais pas à gauche donc le couple $([0,1[, T)$ n'est pas un système dynamique topologique. En revanche $([0,1[, \mathcal{B}, \lambda, T)$ est un s.d.m., où λ est la mesure de Lebesgue et $\mathcal{B}$ la famille des Boréliens. (Pour plus de détails sur les échanges 'intervalles voir [**CFS**])

Version "Cantor" des échanges d'intervalles.

Ce qui suit a pour but de faire des échanges d'intervalles des s.d.t. définis sur des Cantor.

Soit $T : [0,1[\to [0,1[$ un échange de k intervalles minimal. Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ les intervalles associés à T. Soient $\mathcal{D}(T) = \{d_1, \dots, d_k\}$ l'ensemble des extrémités gauches des intervalles Δ_i et $\mathcal{O}(T) = \{T^j d; j \in \mathbb{Z}, d \in \mathcal{D}(T)\}$. Définissons

$$X = ([0,1[\backslash \mathcal{O}(T)) \bigcup \{x^-, x^+; x \in \mathcal{O}(T)\}$$

où $0^- = 1$. De plus, on pose $x^- < x^+$ pour tout $x \in \mathcal{O}(T)$ (avec l'exception $0^- \geq x$ pour tout $x \in X$). Cela étend l'ordre naturel sur $[0,1[$ en un ordre sur X. Muni de la topologie engendrée par les intervalles de X, l'espace topologique X est un ensemble de Cantor car $\mathcal{O}(T)$ est dense dans $[0,1[$ par minimalité de T.

Soit $\phi : X \to [0,1[$ qui à x^+ et x^- associe x et à x associe x si $x \notin \mathcal{O}(T)$. C'est une application continue et surjective. Elle est bijective à un ensemble dénombrable de points près.

Soit $S : X \to X$ définie par $S(y) = T(y)$ si $y \in [0,1[\backslash \mathcal{O}(T)$ et $S(x^\epsilon) = T(x)^\epsilon$ si $x \in \mathcal{O}(T)$ où $\epsilon \in \{+,-\}$. Le couple (X,S) est un système dynamique de Cantor minimal, nous dirons que c'est la version Cantor de l'échange d'intervalle T. (pour plus de détails voir [**GJ2**])

CHAPITRE 2

Les systèmes dynamiques linéairement récurrents

Ces systèmes dynamiques ont été introduits dans ma thèse et dans l'article 4. C'est

1. Les sous-shifts linéairement récurrents

Une notion très utile en dynamique symbolique est celle de mot de retour. Soit x une suite de $A^{\mathbb{N}}$ où A est un alphabet fini et $u \in L(x)$. Un *mot de retour* sur u dans x est un mot $w \in L(x)$ vérifiant

(1) $wu \in L(x)$;

(2) u est un préfixe de wu ;

(3) le mot wu contient exactement deux occurrences de u.

Notons $\mathcal{R}_u(x)$ l'ensemble des mots de retour sur u de x.
Dans ce qui suit, sauf mention du contraire, nous supposerons que x est uniformément récurrente. Remarquons que l'ensemble $\mathcal{R}_u(x)$ est fini pour tout $u \in L(x)$. De plus, pour tout $y, z \in \Omega(x)$ nous avons $\mathcal{R}_u(y) = \mathcal{R}_u(z)$. Ainsi, lorsqu'aucune ambiguïté ne sera possible nous écrirons $\mathcal{R}_u$ au lieu de $\mathcal{R}_u(x)$.
Numérotons les mots de retour. Posons $R_u = \{1, \ldots, \mathrm{card}(\mathcal{R}_u)\}$ et définissons la bijection $\theta_{x,u} : R_u \to \mathcal{R}_u$ de la façon suivante : Si n est la première occurrence de $\theta_{x,u}(k)$ dans x alors il y a exactement $k-1$ mots de retour sur u distincts ayant une occurrence comprise entre 0 et $n-1$. Autrement dit, $\theta_u(k)$ est le k-ème mot de retour sur u que l'on lit lorsque l'on parcourt x de la gauche vers la droite. Considérons $R_u(x)$ comme un alphabet et $\theta_{x,u}$ comme un morphisme de R_u dans A^*. On peut montrer que $\theta_{x,u} : R_u^* \to A^*$ et $\theta_{x,u} : R_u^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ sont injectives (article 1).
Supposons désormais que u est un préfixe de x. Ainsi, la suite x étant une concaténation de mots de retour sur u, l'équation $\theta_{x,u}(y) = x$ a une unique solution y. Nous la notons $\mathcal{D}_u(x)$ et nous dirons que c'est la *suite dérivée de x par rapport à u*. Ces suites dérivées permettent de caractériser les suites substitutives (article 1).

Théorème 1. *Soient A un alphabet fini et $x \in A^{\mathbb{N}}$ une suite uniformément récurrente. Alors, x est substitutive si et seulement si l'ensemble des suites dérivées $\mathcal{D}_u(x)$, où u est un préfixe de x, est fini.*

Il est possible de définir des suites dérivés de x pour des mots u qui ne sont pas des préfixes de x. C. Holton et L. Zamboni ont montré dans [**HZ1**] que x est substitutive si et seulement si l'ensemble des suites dérivées $\mathcal{D}_u(x)$, où u est un mot de $L(x)$, est fini. Ces deux résultats se déduisent l'un de l'autre.
L'interprétation des suites dérivées en termes de systèmes dynamiques topologiques est la suivante. Notons (Y, T) le sous-shift engendré par $\mathcal{D}_u(x)$ et (X, T) celui engendrée par x. L'application θ_u définit un isomorphisme de (Y, T) sur le système

induit par (X,T) sur le cylindre $[u]$. La version dynamique du résultat de Holton et Zamboni est la suivante :

THÉORÈME 2. *Un sous-shift minimal (X,T) est substitutif si et seulement si l'ensemble des systèmes induits sur des cylindres de (X,T) est fini à un isomorphisme près.*

Ce type de résultat a été étendu à des pavages de $\mathbb{Z}^d$ par N. Priebe [**Pr1, Pr2, PS**] où les systèmes induits, ou suites dérivées, ont pour analogues les "pavages de Voronoï dérivés".
Afin d'établir le Théorème 1, j'ai montré que les suites substitutives x ont la propriété suivante

$$(LR) \qquad \exists K,\ \forall u \in L(x),\ \forall w \in \mathcal{R}_u,\ |w| \leq K|u|.$$

ou encore

$$\exists K,\ \forall u \in L(x),\ r_{[u]}(x) \leq K|u|,\ \forall x \in X.$$

Cette propriété, même si elle ne caractérise pas les suites substitutives, est l'une des propriétés les plus marquantes des suites et systèmes substitutifs. Par exemple d'elle seule nous pouvons déduire l'unique ergodicité, l'absence de mélange fort et la complexité sous-affine (et donc l'entropie topologique nulle).
La propriété (LR) a été étendue aux pavages de $\mathbb{R}^d$ par J. Lagarias et P. Pleasants dans [**LP**], ceci donne des pavages "linearly repetitives". Dans [**DaLe**] les auteurs prouvent des théorèmes ergodiques sous-additifs sur de tels pavages.
Une partie de l'article 4 est consacrée à l'étude des suites uniformément récurrentes ayant la propriété (LR). Les articles 5, 5 bis, 11 et 15 poursuivent cette étude. Nous avons appelé ces suites "les suites linéairement récurrentes" (de constante K) et les systèmes dynamiques engendrés par ces suites "les systèmes linéairement récurrents" (de constante K).
Les propriétés suivantes de ces suites sont simples à prouver mais essentielles dans la plupart des preuves.

THÉORÈME 3. *Soit x une suite linéairement récurrente non-périodique de constante K. Alors,*

1. *$p_x(n) \leq Kn$;*
2. *x est à puissances de mots bornée par K ; i.e. si $u^{K+1} \in L(x)$ alors u est le mot vide.*
3. *Pour tout $u \in L(x)$ et tout $w \in \mathcal{R}_u$ nous avons $(1/K)|u| < |w|$;*
4. *Pour tout $u \in L(x)$, $\mathrm{card}(\mathcal{R}_u) \leq K(K+1)^2$.*

La preuve de ce résultat tient dans la remarque suivante : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout mot $w \in L(x)$ de longueur $(K+1)n-1$, tous les mots de longueur n de $L(x)$ apparaissent dans w.
Nous savons que les facteurs topologiques des systèmes substitutifs qui sont des sous-shifts sont des systèmes substitutifs. Nous savons également que ses facteurs peuvent être des odomètres. En fait le résultat suivant permet de montrer qu'un facteur d'un système substitutif est nécessairement un système substitutif ou un odomètre (article 4). Ceci signifie notamment que les facteurs Cantor de ces sous-shifts sont soit expansifs, soit équicontinus. Ceci n'est en général pas vrai : Par

exemple dans l'article 9, T. Downarowicz et moi-même montrons que certains systèmes de Toeplitz ont des facteurs Cantor qui ne sont ni expansifs ni équicontinus.

THÉORÈME 4. *Soit (Y, T) un système linéairement récurrent. Il existe une constante D tel que si nous avons*

$$(Y_n, T) \xrightarrow{\gamma_{n-1}} (Y_{n-1}, T) \xrightarrow{\gamma_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\gamma_1} (Y_1, T) \xrightarrow{\gamma_0} (Y_0, T) ,$$

où les γ_i sont des facteurs non bijectifs, (Y_0, T) n'est pas périodique, et $(Y_n, T) = (Y, T)$, alors $n \leq D$.

THÉORÈME 5. *Soient (X, T) un système linéairement récurrent et (Y, S) l'un de ses facteurs Cantor. Alors (Y, S) est isomorphe à un sous-shift linéairement récurrent ou à un odomètre.*
De plus, si (X, T) est un système substitutif alors (Y, S) est isomorphe à un système substitutif ou à un odomètre à base ultimement constante.

Dans l'article 4 j'ai amélioré le Théorème 4.

THÉORÈME 6. *Soit (X, T) un sous-shift linéairement récurrent. L'ensemble de ses facteurs non-périodiques qui sont des sous-shifts est fini à un isomorphisme près.*

La preuve de résultat utilise largement le Théorème 3 et d'autres idées se trouvant dans l'article 1.
Du théorème précédent on déduit immédiatement que l'ensemble des facteurs Cantor de (X, T) est fini si et seulement s'il n'a pas d'odomètre pour facteur. En général il est très difficile de déterminer si un sous-shift linéairement récurrent a un odomètre pour facteur. Lorsque (X, T) est un sous-shift substitutif j'ai caractérisé dans l'article 5 tous les odomètres qui sont des facteurs de (X, T). Cette caractérisation est explicite et algorithmique. Ce résultat a également était obtenu par A. Siegel dans [**Si**].
Concernant les facteurs qui ne sont pas des Cantor, nous avons abordé la question, avec M. I. Cortez, B. Host et A. Maass dans l'article 11, sous l'angle des valeurs propres des systèmes dynamiques, puis dans l'article 15 avec X. Bressaud et A. Maass. Ce thème sera développé dans une prochaine section.

2. S-adisme et récurrence linéaire

Les suites ou sous-shifts linéairement récurrents ont une caractérisation en termes de suites engendrées par des produits infinis de morphismes.
Soient $a \in A$, S un ensemble fini de morphismes σ de $A(\sigma) \subset A$ dans A^* et $(\sigma_n : A_{n+1} \to A_n^*; n \in \mathbb{N})$ une suite de $S^{\mathbb{N}}$ telle que $(\sigma_0\sigma_1 \cdots \sigma_n(aa\cdots); n \in \mathbb{N})$ converge dans $A^{\mathbb{N}}$ vers x. Nous dirons que x est une suite *S-adique sur A* (engendrée par $(\sigma_i; i \in \mathbb{N}) \in S^{\mathbb{N}}$ et a). Cette terminologie est apparue dans [**Fe**] (notons que dans [**Fe**] la définition est légèrement plus générale).
Quelques mots à propos de ces suites. B. Host a énoncé la conjecture suivante :

Il existe une classe "naturelle" $\mathcal{S}$ de suites S-adiques telle que x appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si x est de complexité sous-affine.

Étant donnée une suite x, s'il existe K tel que $p_x(n+1) - p_x(n) \leq K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors on a évidemment $p_x(n) \leq Kn$. J. Cassaigne [**Ca**] a montré que la réciproque était vraie. Puis S. Ferenczi [**Fe**] a utilisé ce résultat afin de montrer une partie de la conjecture précédente, à savoir : *Si x est uniformément récurrente et a une complexité sous-affine alors x est S-adique.*

Soit x une suite *S-adique sur A* (engendrée par $(\sigma_i; i \in \mathbb{N}) \in S^{\mathbb{N}}$ et a). S'il existe un entier s_0 tel que pour tout entier r, tout $b \in A_r$ et tout $c \in A_{r+s_0+1}$, la lettre b a une occurrence dans $\sigma_{r+1}\sigma_{r+2}\cdots\sigma_{r+s_0}(c)$, alors nous dirons que x est une suite S-adique *primitive*.
Soit $\sigma : A \to B^*$ un morphisme. Nous dirons que σ est *propre* s'il existe deux lettres $r, l \in B$ telles que pour tout $a \in A$ la première lettre $\sigma(a)$ est l et la dernière lettre de $\sigma(a)$ est r. Nous dirons que la suite $x \in A^{\mathbb{N}}$ est une suite *S-adique propre* si c'est une suite S-adique engendrée par des morphismes propres. Le sous-shift engendré par une suite S-adique propre est appelé *sous-shift S-adique propre*.
Dans l'article 5 j'ai énoncé qu'un sous-shift minimal était linéairement récurrent si et seulement s'il était un sous-shift S-adique primitif. Une erreur dans la preuve a été relevée par K. Wargan. En fait l'énoncé lui-même n'était pas correct. Dans l'article 5 bis j'ai donné un contre-exemple et prouvé le résultat suivant.

Proposition 7. *Le sous-shift (X, T) est LR si et seulement si c'est un sous-shift S-adique primitif et propre.*

La preuve de ce résultat utilise abondamment les mots de retour et les idées se trouvant dans l'article 1.
J'ai également montré qu'un sous-shift Sturmien engendré par $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est linéairement récurrent si et seulement si la suite des coefficients du développement en fraction continue de α est bornée. A la suite du Corollaire 3.6 de l'article 6 nous remarquons qu'un sous-shift Sturmien (non-périodique) engendré par $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est substitutif si et seulement si α est quadratique. B. Parvaix [**Par**] a montré un résultat analogue pour les suites sturmiennes qui sont des points fixes de substitutions.

3. Valeurs propres et récurrence linéaire

La notion de sous-shift linéairement récurrent s'étend naturellement aux systèmes dynamiques de Cantor via les tours de Kakutani-Rohlin. Ceci nécessite quelques définitions.
Prenons un système dynamique de Cantor (X, T). Une *partition Kakutani-Rohlin en clopen* (partition KRC) est une partition $\mathcal{P}$ de X du type :

$$\mathcal{P} = \{T^{-j}B_k; 1 \leq k \leq C,\ 0 \leq j < h_k\}$$

où $C > 0$ est un entier, $B_1, \dots, B_C$ sont des ouverts-fermés de X et $h_1, \dots, h_k$ des entiers positifs. Pour $1 \leq k \leq C$, la k-ème *tour* de $\mathcal{P}$ est la famille $\{T^{-j}B_k; 0 \leq j < h_k\}$, et la *base* de $\mathcal{P}$ est l'ensemble $B = \bigcup_{1 \leq k \leq C} B_k$.
Dans [**HPS**] les auteurs ont montré que pour tout système dynamique de Cantor (X, T) il existe une suite de partitions (KRC)

$$\big(\mathcal{P}(n) = \{T^{-j}B_k(n) : 1 \leq k \leq C(n),\ 0 \leq j < h_k(n)\}\ ;\ n \in \mathbb{N}\big). \tag{1}$$

vérifiant (KR1), (KR2), (KR3), (KR4), (KR5) et (KR6) :
Pour tout n notons $B(n)$ la base de $\mathcal{P}(n)$ et supposons que $\mathcal{P}(0)$ est la partition trivial : $B(0) = X$, $C(0) = 1$ and $h_1(0) = 1$.

(KR1) $B(n+1) \subset B(n)$;

(KR2) $\mathcal{P}(n+1) \succeq \mathcal{P}(n)$; i.e., pour tout $A \in \mathcal{P}(n+1)$ il existe $A' \in \mathcal{P}(n)$ tel que $A \subset A'$.

(KR3) $\cap_{n=0}^{\infty} B(n)$ contient un unique point ;

(KR4) la suite de partitions engendre la topologie de X ;

(KR5) pour tout $n \geq 1$, $1 \leq k \leq C(n-1)$, $1 \leq l \leq C(n)$, il existe $0 \leq j < h_l(n)$ tel que $T^{-j}B_l(n) \subset B_k(n-1)$;

(KR6) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B(n+1) \subset B_1(n)$.

Notons que les $h_l(n)$ sont des temps de retour dans $B(n)$. Par conséquent nous étendons la notion de linéairement récurrent en exigeant des rapports $h_k(n+1)/h_l(n)$ d'être bornés. Plus précisément :

Définition 8. *Un système dynamique de Cantor minimal* (X,T) *est* linéairement récurrent *(de constante* L*) s'il existe une suite de partitions KRC*

$$(\mathcal{P}(n) = \{T^{-j}B_k(n); 1 \leq k \leq C(n), 0 \leq j < h_k(n)\}; n \in \mathbb{N})$$

satisfaisant (KR1)-(KR6) et

(LR) *il existe* L *telle que pour tout* $(l,k) \in \{1,\ldots,C(n)\} \times \{1,\ldots,C(n-1)\}$ *et tout* $n \geq 1$

$$h_l(n) \leq L \ h_k(n-1) \ .$$

Tous les sous-shifts linéairement récurrents sont linéairement récurrents au sens de cette nouvelle définition. La preuve de la Proposition 1.1 de l'article 5 bis permet de construire la partition adéquate.
Dans l'article 11 nous montrons que les systèmes dynamiques de Cantor minimaux linéairement récurrents sont uniquement ergodiques. Par la suite nous noterons μ cette unique mesure ergodique.
Nous nous sommes intéressés à ce type de systèmes afin d'étendre un résultat de B. Host [**Ho**] affirmant que les fonctions propres d'un système substitutif minimal sont toujours presque partout égales à des fonctions propres continues. Rappelons qu'un nombre complexe λ est une *valeur propre* du système dynamique (X,T,μ) s'il existe $f \in L^2(\mu)$, $f \neq 0$, telle que $f \circ T = \lambda f$, μ-presque partout ; f est une *fonction propre* associée à λ. Les systèmes dynamiques de Cantor linéairement récurrents étant ergodiques, si deux fonctions propres sont associées à la même valeur propre alors elles sont presque partout égales à une constante multiplicative près. Nous dirons que λ est une *valeur propre continue* si elle a une fonction propre continue.
Les deux théorèmes suivants ont été démontrés dans les articles 11 et 15. Plus précisément, dans l'article 11 nous avons montré la condition nécessaire du (1) et la condition suffisante du (2) des théorèmes 9 et 10 ci-dessous.

Théorème 9. *Soient* (X,T,μ) *un système dynamique de Cantor linéairement récurrent et*

$$(\mathcal{P}(n) = \{T^{-j}B_k(n); 1 \leq k \leq C(n), 0 \leq j < h_k(n)\}; n \in \mathbb{N})$$

une partition KRC satisfaisant (KR1)-(KR6) et (LR). Soit $\lambda = \exp(2i\pi\alpha) \in \mathbb{C}$. *Nous avons :*

(1) λ *est une valeur propre de* (X,T,μ) *si et seulement si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{1\leq k\leq C(n)} \left|\lambda^{h_k(n)} - 1\right|^2 < \infty.$$

(2) *λ est une valeur propre continue de (X,T,μ) si et seulement si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{1\leq k\leq C(n)} \left|\lambda^{h_k(n)} - 1\right| < \infty.$$

A une suite de partitions

$$\left(\mathcal{P}(n) = \{T^{-j}B_k(n) : 1 \leq k \leq C(n),\ 0 \leq j < h_k(n)\}\ ;\ n \in \mathbb{N}\right)$$

on associe une suite de matrices $(M(n); n \geq 1)$ où

$$M(n) = (m_{l,k}(n); 1 \leq l \leq C(n), 1 \leq k \leq C(n-1))$$

est définie par

$$m_{l,k}(n) = \#\{0 \leq j < h_l(n); T^{-j}B_l(n) \subset B_k(n-1)\}.$$

Remarquons que

$$h_l(n) = \sum_{k=1}^{C(n-1)} m_{l,k}(n)h_k(n-1), \quad n \geq 1,\ 1 \leq l \leq C(n).$$

Ainsi, pour tout $n \geq 0$ posons $H(n) = (h_l(n); 1 \leq l \leq C(n))^t$. On note que $H(n) = M(n)H(n-1)$ pour tout $n > 0$ puis que $H(n) = P(n)H(1)$ où $P(n) = M(n)M(n-1)\cdots M(2)$ pour tout $n \geq 2$.
Avant d'énoncer la version matricielle du Théorème 9 introduisons une notation. Pour tout réel x notons $|||x|||$ la distance de x à l'entier le plus proche. Pour un vecteur $V = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ nous posons

$$\|V\| = \max_{1\leq j\leq m} |v_j| \text{ et } |||V||| = \max_{1\leq j\leq m} |||v_j|||\ .$$

Théorème 10. *Sous les hypothèses du Théorème 9 :*

(1) *λ est une valeur propre de (X,T,μ) si et seulement si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |||\alpha P(n)H(1)|||^2 < \infty.$$

(2) *λ est une valeur propre continue de (X,T,μ) si et seulement si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |||\alpha P(n)H(1)||| < \infty.$$

Conservons les hypothèses du Théorème 9. Dans ce cas on voit que l'ensemble $\mathcal{M} = \{M(n); n > 0\}$ est fini. Lorsque $\mathcal{M}$ ne contient qu'un élément, que l'on note M, nous avons montré dans l'article 4 qu'alors (X,T) est soit isomorphe à un système substitutif, soit isomorphe à un odomètre à base ultimement constante. Dans ce cas $P(n) = M^{n-1}$. Si $\lambda = \exp(2i\pi\alpha)$ est une valeur propre de (X,T,μ) alors $|||\alpha M^n H(1)|||$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, d'après le (1) du Théorème 10. On peut alors montrer que cette convergence est géométrique et que par conséquent $\sum_{n=1}^{\infty} |||\alpha P(n)H(1)|||$ converge. Ainsi λ est une valeur propre continue. C'est la démarche qu'à suivi B. Host dans [**Ho**].
Lorsque $\mathcal{M}$ contient au moins deux éléments, la situation est bien plus complexe. On peut construire des systèmes (X,T,μ) tels que $\sum_{n=1}^{\infty} |||\alpha P(n)H(1)|||$ ne converge pour aucun $\alpha \in]0,1[$ (c'est à dire n'ayant pas de valeur propre continue non-triviale)

et tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha P(n)H(1)\|^2$ converge pour certains $\alpha \in]0,1[$. Ainsi, nous pouvons construire des systèmes ayant des valeurs propres non-triviales mais telles qu'aucune ne soit continue.
Pour certains ensembles $\mathcal{M}$ de matrices, nous montrons que si un système linéairement récurrent a une suite de partitions dont la suite des matrices associées appartient à $\mathcal{M}^{\mathbb{N}}$, alors toutes ses valeurs propres sont continues. C'est le cas si toutes les matrices de $\mathcal{M}$ sont de rang 1 ou si toutes les matrices de $\mathcal{M}$ sont 2×2 et de déterminant ± 1.
En utilisant le Théorème d'Oseledets nous montrons qu'étant donné un ensemble fini $\mathcal{M}$ de matrices à coefficients strictement positifs, pour "presque toute" suite de matrices $(M_n; n \in \mathbb{N})$, les systèmes linéairement récurrent ayant une suite de partitions dont la suite des matrices associées $(M_n; n \in \mathbb{N})$ a toutes ses valeurs propres continues.

Idées de la preuve du Théorème 9.
Commençons par montrer le (2). Montrons la condition suffisante de (2).
Pour tout $n \geq 1$, $1 \leq k \leq C(n-1)$, $1 \leq l \leq C(n)$, définissons

$$J(n,k,l) = \left\{0 \leq j < h_l(n);\ T^{-j}B_l(n) \subset B_k(n-1)\right\},\ J(n) = \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq C(n-1) \\ 1 \leq l \leq C(n)}} J(n,k,l)\ .$$

ainsi nous avons $\# J(n,k,l) = m_{l,k}(n)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons

$$f_n(x) = \lambda^{-j} \text{ pour } x \in T^{-j}B_k(n),\ 1 \leq k \leq C(n) \text{ et } 0 \leq j < h_k(n).$$

Nous remarquons que pour tout $x \in X$, $f_n(x)/f_{n-1}(x)$ appartient à $\{\lambda^{-j}; j \in J(n)\}$. Puis que chaque entier de $J(n)$ est la somme d'au plus L termes de la forme $h_k(n-1)$, d'où

$$||f_n - f_{n-1}||_\infty \leq L \max_{1 \leq k \leq C(n-1)} |\lambda^{h_k(n-1)} - 1|\ .$$

Ce qui permet de conclure.

Montrons la condition nécessaire de (2).
Nous allons avoir besoin de la fonction de premier retour dans la base B_n, $r_n : X \to \mathbb{N}$:

$$r_n(x) = \min\{j \in \mathbb{N}; T^j \in B(n)\}.$$

Lorsqu'un élément $x \in X$ part de $B(n)$ pour aller dans $B(n+1)$, nous allons avoir besoin de savoir le nombre de fois où il passe par les $B_j(n)$, $j \in C(n)$. Pour tout $x \in X$, tout $n \in \mathbb{N}$, cette information est donnée par la suite de vecteurs $(s_n(x) = (s_{n,t}(x); 1 \leq t \leq C(n)); n \in \mathbb{N})$ où

$$s_{n,t}(x) = \#\{r_n(x) < j \leq r_{n+1}(x); T^j x \in B_t(n)\}.$$

Nous montrons pour commencer que $\|\alpha P(n)H(1)\|$ converge vers 0 quand n tend vers ∞. Ce qui implique qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{R}^{C(n_0)}$ et $z \in \mathbb{Z}^{C(n_0)}$ tels que $\alpha P(n_0)H(1) = v + z$ et $P(n, n_0)v \to 0$ quand $n \to \infty$. Nous supposerons par la suite que $n_0 = 1$. Nous en déduisons assez rapidement que pour tout $x \in X$

$$\sum_{j \geq 2} s_j(x)P(j)v < \infty. \qquad (2)$$

Il nous faut montrer que $\sum_{j \geq 2} \|P(j)v\| < \infty$.

Pour $n \geq 2$ nous définissons $i(n) \in \{1, ..., C(n)\}$ par

$$|e_{i(n)}P(n)v| = \max_{i \in \{1,\ldots,C(n)\}} |e_i P(n)v|$$

où e_i est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{C(n)}$.
Posons

$$I^+ = \{n \geq 2; e_{i(n)}P(n)v \geq 0\},\ I^- = \{n \geq 2; e_{i(n)}P(n)v < 0\}.$$

Ainsi, il suffit de montrer

$$\sum_{j \in I^+} e_{i(j)}P(j)v < \infty \text{ et } -\sum_{j \in I^-} e_{i(j)}P(j)v < \infty. \tag{3}$$

Par conséquent il suffit de montrer

$$\sum_{j \in I^\epsilon \cap 2\mathbb{N}} e_{i(j)}P(j)v < \infty, \text{ et } \sum_{j \in I^\epsilon \cap (2\mathbb{N}+1)} e_{i(j)}P(j)v < \infty. \tag{4}$$

où $\epsilon \in \{+, -\}$.
Pour montrer que $\sum_{j \in I^+ \cap 2\mathbb{N}} e_{i(j)}P(j)v < \infty$ (les autres cas se traitent de la même façon), nous construisons deux points $x, y \in X$ tels que $s_n(x) - s_n(y) = e_{i(n)}$ si $n \in I^+ \cap 2\mathbb{N}$ et $s_n(x) - s_n(y) = 0$ sinon. Nous concluons en utilisant (2).
Les dichotomies (3) et (4) permettent d'avoir de la "liberté" pour construire x et y.

Montrons la condition nécessaire de (1).
Soit $\lambda = \exp(2i\pi\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, une valeur propre de (X, T, μ) et f une fonction propre de module 1 associée à λ.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $f_n = \mathbb{E}(f|\mathcal{P}_n)$. Pour tout $1 \leq k \leq C(n)$, f_n est constante sur $B_k(n)$. Soit $c(n, k)$ cette constante. La suite $(f_n; n \in \mathbb{N})$ est une martingale qui converge vers f dans $L^2(\mu)$ ([**Doo**]). De plus, les fonctions $f_n - f_{n-1}$, $n \geq 1$, sont mutuellement orthogonales dans $L^2(\mu)$, par conséquent nous avons (voir [**Doo**])

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n - f_{n-1}||_2^2 < \infty\ . \tag{5}$$

Pour $n \geq 1$, $1 \leq l \leq C(n)$, $1 \leq k \leq C(n-1)$ et $j \in J(n, k, l)$, la structure des tours permet de déduire que

$$||f_n - f_{n-1}||_2^2 \geq h_k(n-1)\mu(B_l(n))|\exp(-2i\pi j\alpha)c(n, l) - c(n-1, k)|^2\ .$$

Nous montrons que $h_k(n-1)\mu(B_l(n)) \geq L^{-2}$ où L est la constante de la définition de (LR). Ainsi, grâce à (5) nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{1 \leq l \leq C(n)} \max_{1 \leq k \leq C(n-1)} \max_{j \in J(n,k,l)} |\exp(-2i\pi j\alpha)c(n, l) - c(n-1, k)|^2 < \infty\ . \tag{6}$$

Quelques manipulations élémentaires nous permettent d'obtenir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{1 \leq l \leq C(n)} \max_{1 \leq k \leq C(n-1)} |c(n, l) - c(n-1, k)|^2 < \infty\ . \tag{7}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ and $1 \leq k \leq C(n)$, nous montrons que $\inf_k |c(n,k)|$ converge vers 1 quand $n \to +\infty$. Puis nous déduisons de (6) et (7) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{1 \leq l \leq C(n)} \max_{1 \leq k \leq C(n-1)} \max_{j \in J(n,l,k)} |\exp(-2i\pi j\alpha) - 1|^2 < \infty \ .$$

Nous concluons en utilisant deux éléments consécutifs du même ensemble $J(n,l,k)$.

Montrons la condition suffisante de (1). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{n \geq 2} |||\alpha P(n) H(1)|||^2 < \infty \ . \tag{8}$$

Puisque $|||P(n)(\alpha H(1))||| \to 0$ quand $n \to \infty$, il existe $n_0 \geq 2$, $v \in \mathbb{R}^{C(n_0)}$ et $w \in \mathbb{Z}^{C(n_0)}$, tels que $P(n_0)(\alpha H(1)) = v + w$ et $P(n, n_0)v \to 0$ quand $n \to \infty$.
Pour tout $n \geq 1$ nous définissons $g_n : X \to \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = s_1(x)v + \sum_{j=2}^{n-1} s_j(x) P(j) v \ .$$

Le coeur de la preuve est de montrer que $(f_n = g_n - \mathbb{E}_\mu(g_n); n \geq 1)$ converge vers une fonction f dans $L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu)$. Une fois ceci montré, il est relativement aisé de montrer que $F = \exp(2i\pi f)$ est une fonction propre de (X,T) pour la valeur propre $\lambda = \exp(2i\pi\alpha)$.
Donnons les idées permettant de prouver que $(f_n; n \geq 1)$ converge vers f dans $L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu)$.
Définissons l'application $\tau_n : X \to \{1, \ldots, C(n)\}$ qui à tout x associe le numéro de la tour dans laquelle il se trouve : $\tau_n(x) = k$ si et seulement si $x \in \cup_{j=0}^{h_k(n)-1} T^{-j} B_k(n)$.
On peut montrer que $(\tau_n; n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov non-stationnaire. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n = \sigma(\tau_m; 0 \leq m \leq n); n \in \mathbb{N})$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n = \sigma(s_m; 0 \leq m \leq n); n \in \mathbb{N})$ les filtrations engendrées par respectivement $(\tau_n; n \in \mathbb{N})$ et $(s_n; n \in \mathbb{N})$. Posons $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_n = \sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{G}_{n-1}); n \geq 1)$. Pour tout $j \geq 1$ et $n \geq 1$ nous définissons

$$W_j = s_j P(j) v - \mathbb{E}_\mu(s_j P(j) v | \mathcal{F}_j), \ F_n = \sum_{j=1}^{n-1} W_j,$$

$$Z_j = \mathbb{E}_\mu(s_j P(j) v | \mathcal{F}_j) - \mathbb{E}_\mu(s_j P(j) v) \text{ et } G_n = \sum_{j=1}^{n-1} Z_j.$$

Nous avons $f_n = F_n + G_n$, $n \geq 1$. La suite $F = (F_n; n \geq 1)$ est une martingale relative à la filtration $\mathcal{H}$. De plus, (X,T) étant linéairement récurrent (de constante L) nous avons $\|s_j\| \leq L$, puis $s_j P(j) v \leq L \|P(j) v\| = L |||\alpha P(j) H(1)|||$ pour tout $j \geq 1$. Donc, F est une martingale bornée dans $L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ et donc qu'elle converge μ-presque sûrement ([**Doo**]).
La difficulté est de prouver que $(G_n; n \geq 1)$ converge dans $L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu)$. En effet, $(G_n; n \geq 1)$ n'est pas une martingale relative à la filtration engendrée par $(Z_n; n \geq 1)$. Nous allons voir que la convergence dépend de la chaîne de Markov $(\tau_n; n \in \mathbb{N})$ et de la propriété de mélange suivante : Il existe $c \in \mathbb{R}_+$ et $\gamma \in [0,1[$ tels que pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$, nous ayons

$$\sup_{1 \leq t \leq C(n-k), 1 \leq \bar{t} \leq C(n)} |\mu(\tau_n = \bar{t} | \tau_{n-k} = t) - \mu(\tau_n = \bar{t})| \leq c\gamma^k.$$

De ceci nous déduisons qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \geq 1$, $n > k$ et $v \in \mathbb{R}^{C(1)}$ nous ayons

$$|\mathbb{E}_\mu(s_n P(n)v|\mathcal{F}_{n-k}) - \mathbb{E}_\mu(s_n P(n)v)|^2 \leq K\gamma^k \|P(n)v\|^2.$$

Pour tout $k, n \in \mathbb{N}$ avec $n > k$ définissons

$$Y_{n,k} = \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{E}_\mu(Z_i|\mathcal{F}_{i-k}) - \mathbb{E}_\mu(Z_i|\mathcal{F}_{i-k-1}).$$

Ainsi nous avons $G_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} Y_{n,k}$. En utilisant ce qui précède nous montrons que

$$\mathbb{E}_\mu(Y_{n,k}^2 - Y_{m,k}^2) \leq 4K\gamma^k \sum_{j=m+1}^{n} \|P(j)v\|^2.$$

Pour conclure nous appliquons le critère de Cauchy pour la convergence dans $L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu)$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$. Pour $k \in \mathbb{N}$ nous posons $Y_{n,k} = 0$ si $k \geq n-1$ et $Y_{m,k} = 0$ si $k \geq m-1$. Soit $1 < a < \gamma^{-1}$. Nous obtenons

$$\mathbb{E}_\mu\left((G_n - G_m)^2\right) \leq 4K \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^{-k}\right) \left(\sum_{j=m}^{n} \|P(j)v\|^2\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k \gamma^k\right).$$

CHAPITRE 3

Constructions de représentations de Bratteli-Vershik

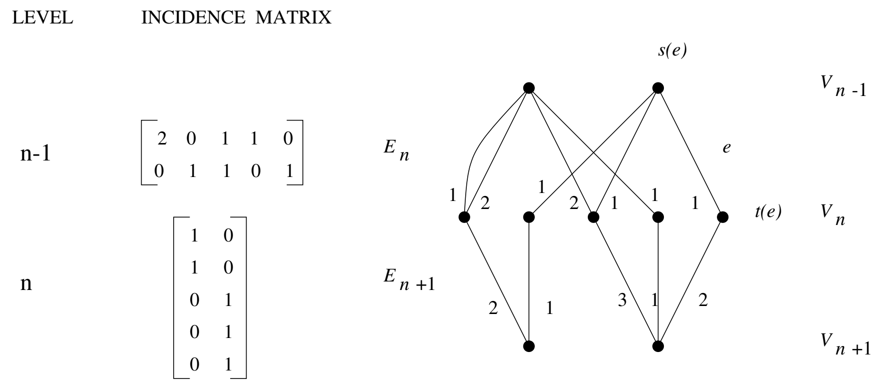
En 1972 O. Bratteli définit dans [**Br**] une classe de graphes infinis, plus tard appelés *diagrammes de Bratteli*, afin de donner une condition nécessaire et suffisante d'isomorphisme entre algèbres de dimension presque finie (approximately finite-dimensional algebras). En 1976, G. A. Elliott [**El**] définit la notion de *groupe de dimension* associé à un diagramme de Bratteli et montre que c'est un invariant complet d'isomorphisme d'algèbres de dimension presque finie.
En 1985, A. M. Vershik [**Ve**] munit ces diagrammes de Bratteli d'ordres lexicographiques définis sur l'ensemble des chemins infinis des diagrammes de Bratteli afin de définir des applications (qu'il appelle *transformations adiques*) sur les diagrammes de Bratteli et donc des systèmes dynamiques (plus tard appelés *systèmes de Bratteli-Vershik*).
En exploitant cette idée les auteurs de [**HPS**] ont montré que tout système dynamique minimal de Cantor est isomorphe à un système dynamique de Bratteli-Vershik. Puis, dans [**GPS**] il a été montré que le groupe de dimension était un invariant complet d'équivalence orbitale.
Dans ce chapitre nous donnerons des exemples de représentations par des systèmes de Bratteli-Vershik de systèmes dynamiques minimaux définis sur des ensembles de Cantor. Dans le chapitre suivant nous montrerons comment utiliser ces représentations et les résultats qu'elles nous ont permis d'obtenir.

1. Quelques définitions

Un *diagramme de Bratteli* est un graphe infini (V, E) où V est appelé “ensemble des sommets” et E l'“ensemble des flèches” ; de plus,

1) $V = V_0 \cup V_1 \cdots$, $E = E_1 \cup E_2 \cdots$ où les V_i sont finis et disjoints deux à deux ainsi que les E_i,
2) l'ensemble V_0 est un singleton $\{v_0\}$,
3) E_k est l'ensemble des flèches joignant les sommets de V_{k-1} aux sommets de V_k,
4) tout sommet de V_k est un sommet d'une flèche de E_k, pour $k \geq 1$, et est un sommet d'une flèche de E_{k+1}, pour $k \geq 0$.

L'ensemble E_k se décrit par sa matrice d'incidence $M^{(k)}$: le coefficient de coordonnées (i, j) de $M^{(k)}$ est le nombre de flèches de E_k joignant le sommet $i \in V_{k-1}$ au sommet $j \in V_k$. Rappelons qu'une flèche $e \in E_k$ est un couple de $V_{k-1} \times V_k$, on le note $(s(e), t(e))$.
Un *diagramme de Bratteli ordonné* $B = (V, E, \preceq)$ est un diagramme de Bratteli (V, E) muni d'un ordre partiel défini sur E. Les flèches e et e' sont *comparables* si et



seulement si $t(e) = t(e')$. Lorsque e n'est pas maximal pour cet ordre, nous notons $\mathrm{succ}(e)$ le successeur de e par rapport à l'ordre partiel.
Soient $k, l \in \mathbb{N}^*$ tels que $k < l$. Nous notons $E(k, l)$ l'ensemble des chemins de longueur $l - k$ dans le graphe joignant les sommets de V_{k-1} à ceux de V_l. L'ordre partiel sur E induit un ordre partiel sur $E(k, l)$ définie par $(e_k, \dots, e_l) \preceq (f_k, \dots, f_l)$ si et seulement s'il existe $k \le i \le l$ tels que $e_j = f_j$ pour $i < j \le l$ et $e_i \preceq f_i$.
Étant donnée une suite strictement croissante d'entiers $(m_n)_{n\ge 0}$ avec $m_0 = 0$ nous définissons la *contraction* de $B = (V, E, \preceq)$ (par rapport à $(m_n)_{n\ge 0}$) par $(\cup_{n\ge 0} V_{m_n}, \cup_{n\ge 0} E(m_n + 1, m_{n+1}), \preceq)$ où $\preceq$ est l'ordre induit sur chaque ensemble $E(m_n + 1, m_{n+1})$. Nous dirons que B est *simple* s'il existe une contraction de B dont les matrices d'incidence sont à coefficients strictement positifs.
Un diagramme de Bratteli est *stationnaire* si pour tout $k \ge 1$ la matrice d'incidence et l'ordre sont les mêmes.
Étant donné un diagramme de Bratteli simple $B = (V, E, \preceq)$ nous définissons X_B comme l'ensemble des chemins infinis $(e_1, e_2, \dots)$ commençant en v_0 tels que pour tout $i \ge 1$ nous ayons $t(e_i) = s(e_{i+1})$. Les ensembles $[e_1, e_2, \dots, e_k] = \{(f_1, f_2, \dots) \in X_B; f_i = e_i,\ 1 \le i \le k\}$ sont appelés *cylindres*. Nous munissons X_B de la topologie engendrée par les cylindres. Chaque $[e_1, e_2, \dots, e_k]$ est également fermé et nous observons que X_B est un espace métrique compact ayant une base de sa topologie constituée d'ouverts-fermés et n'a pas de point isolé, autrement dit, c'est un ensemble de Cantor.
Lorsqu'il existe un unique $x = (e_1, e_2, \dots) \in X_B$ tel que e_i est maximal pour tout $i \ge 1$ et un unique $y = (f_1, f_2, \dots) \in X_B$ tel que f_i est minimal pour tout $i \ge 1$, nous dirons que $B = (V, E, \preceq)$ est un diagramme de Bratteli proprement ordonné. Nous appellerons ces points $x_{\max}$ et $x_{\min}$ respectivement. Dans ce cas nous pouvons définir une dynamique V_B sur X_B qui est appelée *application de Vershik*. Cette application est définie de la façon suivante : Soient $x = (e_1, e_2, \dots) \in X_B \backslash x_{\max}$ et $k \ge 1$ le plus petit entier tel que la flèche e_k n'est pas maximale. Soient $f_k = \mathrm{succ}(e_k)$ et $(f_1, f_2, \dots, f_{k-1})$ l'unique chemin minimal de $E_{1,k-1}$ allant de v_0 a f_k. Nous posons $V_B(x) = (f_1, \dots, f_{k-1}, f_k, e_{k+1}, \dots)$ et $V_B(x_{\max}) = x_{\min}$. Le système dynamique (X_B, V_B) est appelé *système de Bratteli-Vershik* (engendré par $B = (V, E, \preceq)$. Tout système dynamique engendré par une contraction de B est topologiquement conjugué à (X_B, V_B). Dans [**HPS**] il est prouvé que tout système dynamique de Cantor minimal (X, T) est topologiquement conjugué à un système

de Bratteli-Vershik (X_B, V_B). Nous dirons que (X_B, V_B) est une *représentation de Bratteli-Vershik* de (X, T).
Plus de détails ainsi que des exemples de représentation sont donnés dans les articles 4, 6, 7, 12.

2. Des exemples de représentations

La représentation d'un système dynamique minimal de Cantor par un système de Bratteli-Vershik repose sur la construction d'une suite de partitions de Kakutani-Rohlin emboîtées (voir l'article 4). Cette suite s'obtient, pour l'essentiel, au moyen des fonctions de premier retour dans des ouverts emboîtés de plus en plus fins. De telles fonctions étant en général très difficiles à décrire, il n'est pas simple d'obtenir les diagrammes de Bratteli recherchés. Néanmoins, il est possible de les obtenir pour certaines classes de systèmes dynamiques.

2.1. Odomètres. Un *odomètre de base* $(p_k; k \geq 1)$ est la limite inverse d'une suite de groupes $(\mathbb{Z}/p_1p_2\cdots p_k\mathbb{Z}; k \geq 1)$ que l'on munit de l'addition de 1. Une représentation $B = (V, E, \preceq)$ de cet odomètre est décrite par Card $V_i = 1$, $i \geq 0$, et Card $E_i = p_i$. L'ordre est sans importance car $V_i = 1$.
Nous dirons qu'un odomètre est à *base stationnaire* lorsqu'il existe i_0 tel que $p_i = p_{i+1}$ pour tout $i \geq i_0$.

2.2. Systèmes dynamiques substitutifs.

Théorème 11. *La famille des systèmes de Bratteli-Vershik engendrés par des diagrammes de Bratteli stationnaires proprement ordonnés est, aux isomorphismes près, la réunion disjointe de la famille des systèmes substitutifs minimaux et de la famille des odomètres à base stationnaire. De plus, la correspondance en question est donnée par une construction algorithmique.*

A. Forrest [**For**] a prouvé la première partie de ce résultat. Sa preuve est de nature plus existentielle qu'algorithmique ; Elle ne permet pas de construire la représentation de Bratteli-Vershik d'un système substitutif minimal donné.
Dans l'article 4 nous avons donné une autre preuve qui, elle, donne lieu à un algorithme de construction du diagramme de Bratteli.

2.3. Systèmes dynamiques linéairement récurrents. On peut montrer sans difficulté le résultat suivant.

Théorème 12. *Un système dynamique minimal de Cantor est linéairement récurrent si et seulement s'il a une représentation de Bratteli-Vershik (X_B, V_B), où $B = (V, E, \preceq)$, telle qu'il existe K vérifiant Card $E_i \cup V_i \leq K$ pour tout $i \geq 1$ et dont les matrices d'incidence de B sont à coefficients strictement positifs.*

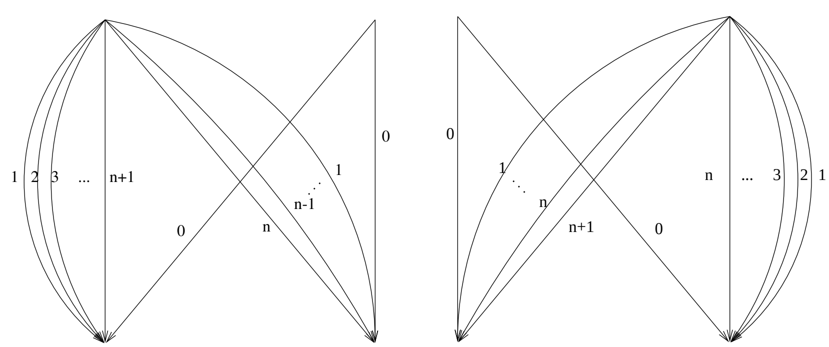
2.4. Systèmes dynamiques de Toeplitz. Un diagramme de Bratteli a la propriété *du nombres de chemins égaux* si pour tout $n \geq 1$ et tout $u, v \in V_n$ on a $|t^{-1}(u)| = |t^{-1}(v)|$. Cette propriété a été définie dans [**GJ1**] par R. Gjerde et O. Johansen. Les odomètres ont cette propriété.
Les auteurs de [**GJ1**] ont obtenu le résultat suivant.

Théorème 13. *Un système dynamique symbolique minimal est de Toeplitz si et seulement s'il a une représentation de Bratteli-Vershik (X_B, V_B) expansive, où $B = (V, E, \preceq)$ à la propriété du nombre de chemins égaux. De plus, il existe des systèmes* *de Bratteli-Vershik ayant la propriété du nombre de chemins égaux qui ne sont ni équicontinus ni expansifs.*

Par conséquent il existe des diagrammes de Bratteli ayant la propriété du nombre de chemins égaux dont les systèmes dynamiques associés ne sont ni des sous-shifts (car pas expansifs), ni des odomètres (car pas équicontinus).

2.5. Systèmes dynamiques Sturmiens. Le Théorème 7.1 et le Théorème 8.1 de [**HM**] permettent de donner des représentations de Bratteli-Vershik des systèmes Sturmiens (voir l'article 6 pour plus de détails).

THÉORÈME 14. *La famille des systèmes Sturmiens est, à des isomorphismes près, la famille des systèmes de Bratteli-Vershik $B = (V, E, \preceq)$ définis par Card $V_i = 2$, $i \geq 0$, Card $E_1 = 2$, $M^{(1)} = (1, 1)$ et où E_i, $i \geq 2$, et $\preceq$ sont donnés par les figures ci-dessous.*



2.6. Version Cantor des échanges d'intervalles.

THÉORÈME 15. *Soit (X, ϕ) un système dynamique minimal de Cantor engendré par un échange de k intervalles minimal. Le système (X, ϕ) a une représentation de Bratteli-Vershik (X_B, V_B), où $B = (V, E, \preceq)$, telle que*

(1) $|V_1| = k$ *et* $|V_i| - |V_{i+1}| \in \{0, 1\}$ *pour tout* $i \in \{0, 1\}$;

(2) *Pour tout* $i \geq 1$ *la matrice d'incidence* $M^{(i)}$ *de* E_i *est de la forme*

$$M^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & s_l \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & s_{l+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & s_{l+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & s_{l+2} \end{bmatrix},$$

où $s_i \in \{0, m, m+1\}$, $s_l = m$ et $s_{m+1} = m + 1$ pour un certain $m \geq 0$. Lorsque $|V_i| - |V_{i+1}| = 1$, la ligne $l+1$ est supprimée. Tous les coefficients de $M^{(0)}$ sont égaux à 1.

Ce théorème a été prouvé dans [**GJ2**]. Pour compléter ce résultat les auteurs montrent qu'il existe des systèmes de Bratteli-Vershik vérifiant les hypothèses du Théorème sans être isomorphes à un système dynamique minimal de Cantor engendré par un échange d'intervalles.

CHAPITRE 4

Utilisations des représentations de Bratteli-Vershik

Nous utilisons les représentations de Bratteli-Vershik de façon à quantifier et analyser les temps de retour, temps d'entrée et taux de récurrence des systèmes dynamiques. Nous aurions pu mettre dans ce chapitre l'étude des valeurs propres des systèmes linéairement récurrents faites dans le Chapitre 2. En effet, les partitions employées lors de ce travail sont celles servant à construire les représentations de Bratteli-Vershik ayant un nombre borné de sommets et de flèches.
Les utilisations les plus remarquables des diagrammes de Bratteli ont été faites dans [**HPS**] et surtout [**GPS**]. Ils ont été au coeur des preuves permettant de caractériser l'équivalence orbitale et l'équivalence orbitale forte en termes de "groupes de dimension".

1. Systèmes induits

1.1. Auto-induction. Pour les systèmes dynamiques de Bratteli-Vershik l'induction sur un ouvert-fermé est très visuelle : elle correspond à l'effacement d'un nombre fini d'arêtes et de sommets. C'est-à-dire qu'une représentation de Bratteli-Vershik du système induit est obtenue en enlevant un nombre fini d'arêtes et de sommets au diagramme initial. Ainsi, pour les systèmes de Bratteli-Vershik stationnaires (X, S) (i.e. les systèmes substitutifs et les odomètres à base ultimement constante) il est facile de montrer le résultat suivant : Si U est un ouvert-fermé de X alors il existe un ouvert-fermé $V \subset U$ tel que (X, S) est isomorphe à (V, S_V). Dans ce cas on peut qualifier (X, S) de système auto-induit.

1.2. Systèmes Sturmiens et équivalence orbitale. Soient (X, T) et (Y, S) deux systèmes dynamiques. Ils sont *équivalents orbitalement* (EO) s'il existe un homéomorphisme $\phi : X \to Y$ et deux fonctions à valeurs entières, $n : X \to \mathbb{Z}$ et $m : Y \to \mathbb{Z}$ telles que pour tout $x \in X$, $\phi(T^{n(x)}(x)) = S(\phi(x))$ et $\phi(T(x)) = S^{m(x)}(\phi(x))$. Remarquons que ceci est équivalent au fait que ϕ échange les orbites : $\phi(\{T^n x \,;\, n \in \mathbb{Z}\}) = \{S^n(\phi(x)) \,;\, n \in \mathbb{Z}\}$. Ils sont *fortement équivalents orbitalement* (FEO) si de plus les applications n et m ont un seul point de discontinuité.
Étant donnés deux systèmes dynamiques, (X, T) et (Y, S), équivalent orbitalement il est naturel de chercher quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) imposer de façon à les rendre conjugués topologiquement. Dans [**Bo**] il a été montré que l'équivalence orbitale est telle que n et m sont continues si et seulement si (X, T) est topologiquement conjugué à (Y, S) ou (Y, S^{-1}). En général l'équivalence orbitale seule ne suffit pas ; dans [**Su**] et [**Or**] il est montré qu'au sein d'une même classe d'équivalence

orbitale ont peu trouver toutes les entropies possibles. Néanmoins si l'on se restreint à certaines familles de systèmes dynamiques l'équivalence orbitale implique la conjugaison topologique : c'est le cas pour la famille des odomètres.
Pour quelles autres familles de systèmes dynamiques non triviaux ceci est-il vrai ? C'est en partant de cette question que dans l'article 6, en nous aidant de la représentation des systèmes Sturmiens décrite dans la sous-section 2.5, nous avons montré le résultat suivant.

THÉORÈME 16. *Soient (X, T) un système Sturmien et (Y, S) un système dynamique minimal de Cantor. Ils sont topologiquement conjugués si et seulement s'ils sont orbitalement équivalents et Kakutani équivalents.*

Les systèmes (X, T) et (Y, S) sont *Kakutani équivalents* s'ils ont des systèmes induits topologiquement conjugués.

2. Lois limites de temps de retour ou d'entrée

Soit (X, T) un système dynamique minimal de Cantor et μ une mesure de probabilité T-invariante. Soit $I \subseteq X$ un ouvert-fermé de X. Pour chaque $x \in X$ le temps d'entrée de x dans I et le k-ème, $k \geq 2$, temps de retour de x dans X sont, respectivement, définis par

$$N_I^{(1)}(x) = \inf\{n > 0 : T^n(x) \in I\} \text{ and } N_I^{(k)}(x) = \inf\{n > N_I^{(k-1)}(x) : T^n(x) \in I\}.$$

Le système (X, T) étant minimal, ces quantités sont finies. Les distributions correspondantes sont

$$F_I^{(1)}(t) = \mu\{x \in X : \mu(I) \cdot N_I^{(1)}(x) \leq t\},$$

et, pour $k > 1$,

$$F_I^{(k)}(t) = \mu\{x \in X : \mu(I) \cdot (N_I^{(k)}(x) - N_I^{(k-1)}(x)) \leq t\}.$$

Considérons le problème suivant : Fixons un point $x \in X$ et $(I_n : n \in \mathbb{N})$ une suite d'ouverts-fermés de X telle que $x \in I_n$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\cap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$. Puis, définissons pour chaque $k \geq 2$

$$N_n^{(1)}(x) = N_{I_n}^{(1)}(x) \text{ and } N_n^{(k)}(x) = N_{I_n}^{(k)}(x).$$

Dans les articles 7 et 12 A. Maass et moi-même nous sommes intéressés à l'étude des suites de distributions $(F_{I_n}^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(F_{I_n}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ pour $k \geq 2$.
Lorsque ces limites existent, elles sont appelés lois limites des temps d'entrée. L'existence et la caractérisation des lois limites pour des familles particulières de suites $(I_n : n \in \mathbb{N})$ est un problème apparaissant dans de nombreux articles. La plupart d'entre eux concernent les systèmes à entropie positive avec de fortes conditions de mélange (par exemple [**CC1, CC2, CG, Hi, HSV, Pi**]. Dans tous ces cas les lois limites sont exponentielles. Les premières lois non exponentielles sont apparues dans [**CdF**] pour les homéomorphismes du cercle. Sous certaines conditions sur les développements en fractions continues des "angles" de rotation les auteurs ont montré que ces homéomorphismes avaient des lois limites linéaires par morceaux.
Les rotations sont isomorphes en mesure aux sous-shifts Sturmiens. Les systèmes dynamiques Sturmiens sont les sous-shifts non -triviaux ayant la complexité symbolique la plus faible. Il nous a semblé intéressant de savoir si ces lois limites linéaires par morceaux étaient caractéristiques de la faible complexité.

Par ailleurs, comme nous l'avons signalé précédemment, lorsque l'angle est quadratique, le sous-shift Sturmien associé est conjugué à un système substitutif. Dans [**Coe**], Z. Coelho pose la question de savoir si les systèmes substitutifs ont le même type de lois limites que les sous-shifts Sturmiens. Dans l'article 7 nous répondons par l'affirmative à cette question. Pour y parvenir nous utilisons des techniques liées aux diagrammes de Bratteli.
Par la suite, Y. Lacroix [**La**] a prouvé que pour tout système ergodique apériodique, toute fonction de distribution est une loi limite de temps de retour. Parallèlement, dans l'article 12, A. Maass et moi-même avons obtenu un résultat plus faible dans le contexte des systèmes définis sur des Cantor, mais, nous semble-t-il, avec une preuve plus simple mettant en jeu les techniques et la combinatoire liées aux diagrammes de Bratteli que nous avions déjà utilisées.

3. Taux de récurrence

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un s.d.m.. Soient $U \in \mathcal{B}$ et $x \in U$. Le temps de retour de x dans U est $\tau_U(x) = \inf\{k \geq 1; T^k x \in U\}$. Si $\mu(U) > 0$ alors $\tau_U(x)$ est fini pour μ-presque tout x d'après le théorème de récurrence de Poincaré. Posons

$$\tau(U) = \inf\{\tau_U(x); x \in U\} .$$

Cette quantité a été utilisée dans [**Af**] pour définir une notion de dimension similaire à la notion de dimension de Hausdorff où les diamètres des ensembles sont remplacés par ces quantités.
Soit ζ une partition mesurable de X. Posons $\zeta_n = \zeta \vee T^{-1}\zeta \vee \cdots \vee T^{-n+1}\zeta$ et $\zeta_n(x)$ l'atome de la partition auquel appartient x. Définissons les taux locaux inférieur et supérieur de récurrence par, respectivement,

$$\underline{\mathcal{R}}_\zeta(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\tau(\zeta_n(x))}{n} , \quad \overline{\mathcal{R}}_\zeta(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\tau(\zeta_n(x))}{n} .$$

Si $x \in X$ est un point périodique alors $\underline{\mathcal{R}}_\zeta(x) = \overline{\mathcal{R}}_\zeta(x) = 0$. Les fonctions $\underline{\mathcal{R}}_\zeta$ et $\overline{\mathcal{R}}_\zeta$ étant sous-invariantes ($\underline{\mathcal{R}}_\zeta \circ T \leq \underline{\mathcal{R}}_\zeta$ et $\overline{\mathcal{R}}_\zeta \circ T \leq \overline{\mathcal{R}}_\zeta$), si μ est ergodique alors $\underline{\mathcal{R}}_\zeta$ et $\overline{\mathcal{R}}_\zeta$ sont constantes μ-presque partout.
Dans [**ACS1**] les auteurs ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 17. *Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un s.d.m. ergodique et ζ une partition finie de X. Si $h_\mu(T, \zeta) > 0$ alors $\underline{\mathcal{R}}_\zeta(x) \geq 1$ μ-presque partout.*

Dans [**ACS2**] il est montré que pour certaines rotations (qui sont d'entropie nulle) nous avons $\underline{\mathcal{R}}_\zeta = 0$ presque sûrement. Il est alors naturel de se demander si la réciproque du théorème est vraie. Dans l'article 14 nous montrons que ce n'est pas le cas. Le système substitutif de Morse en est le contre-exemple.
Le résultat principal de l'article 14 précise celui de [**ACS2**] :

Théorème 18. *Soient (Ω_α, S) le sous-shift Sturmien engendré par $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et μ son unique mesure ergodique. Soit ζ la partition $\{[0], [1]\}$.*

(1) *Les énoncés suivants sont équivalents :*
   (a) *Les coefficients du développement en fraction continue de α sont bornés ;*
   (b) $\underline{\mathcal{R}}_\zeta(x) > 0$ *pour μ-presque tout x ;*
   (c) $\overline{\mathcal{R}}_\zeta(x) < \infty$ *pour μ-presque tout x.*

(2) *De plus, si les coefficients du développement en fraction continue de* α *sont bornés, alors* $\underline{\mathcal{R}}_\zeta(x) < 1$ *et* $\overline{\mathcal{R}}_\zeta(x) > 1$ *pour* μ*-presque tout* x.

(3) *Les mêmes résultats sont vrais pour la rotation* $([0,1[, x \mapsto x + \alpha \mod 1)$ *et* $\zeta = \{[0, 1-\alpha[, [1-\alpha, 1[\}$.

Dans [**Ku**] l'auteur calcule précisément $\underline{\mathcal{R}}_\zeta$ et $\overline{\mathcal{R}}_\zeta$ pour les rotations.
Grâce au Théorème 18 nous obtenons le corollaire suivant.

THÉORÈME 19. *Soit* $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *un s.d.m. ergodique. Si* $\underline{\mathcal{R}}_\zeta(x) \geq 1$ *pour* μ*-presque tout* $x \in X$ *et toute partition mesurable non-triviale* ζ *alors* $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *est faiblement mélangeant.*

CHAPITRE 5

Autres aspects de la récurrence

1. Théorèmes ergodiques pondérés

Une bonne suite pour le théorème ergodique ponctuel dans $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, est une suite croissante d'entiers $(u_n; n \in \mathbb{N})$ telle que pour tout système dynamique $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ et toute $f \in L^p(\mu)$ nous avons

$$\mu \left\{ x \in X; \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(T^{u_k} x) \text{ existe} \right\} = 1.$$

(Voir [**RW**] pour plus de détails sur ce sujet.)
D. Schneider et M. Weber ce sont intéressés à ce type de suite pour des sommes ergodiques pondérées par des variables aléatoires. Ils ont montré le résultat suivant : Étant données une bonne suite pour le théorème ergodique ponctuel dans $L^p(\mu)$ $(n_k; k \in \mathbb{N})$, et une suite de variables aléatoires identiquement distribuées, indépendantes et positives, d'espaces d'épreuves $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ ayant un moment du second ordre, alors il existe un ensemble Ω_0 $\mathcal{B}$-mesurable avec $P(\Omega_0) = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, pour tout système dynamique $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ et tout $f \in L^2(\mu)$: $\lim_{N \to +\infty} (1/N) \sum_{k=1}^{N} X_k(\omega) f \circ T^{n_k}$ existe μ-presque-partout.
Dans l'article 8 nous nous intéressons à ce type de problème dans le cas où la pondération est déterministe et pas aléatoire. Nous étudions la convergence des moyennes ergodiques du type

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \theta(k) f \circ T^{u_k}$$

où $\theta = (\theta(k); k \in \mathbb{N})$ est une suite bornée et $u = (u_k; k \in \mathbb{N})$ est une suite strictement croissante d'entiers tel qu'il existe $\delta < 1$ vérifiant

$$(\mathcal{H}_1) \qquad S_N(\theta, u) := \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \theta(k) \exp(2i\pi\alpha u_k) \right| = O(N^{\delta}).$$

Nous obtenons notamment le résultat suivant.

THÉORÈME 20. *Soient $\theta = (\theta(n); n \in \mathbb{N})$ une suite bornée de nombres complexes et $u = (u_n; n \in \mathbb{N})$ une suite strictement croissante d'entiers. Supposons la condition $\mathcal{H}_1$ satisfaite.*
Alors pour tout système dynamique $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ et tout $f \in L^2(\mu)$ nous avons

$$\mu \left\{ x \in X; \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \theta(k) f(T^{u_k} x) = 0 \right\} = 1.$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $f \in L^{2+\varepsilon}(\mu)$ et tout $\beta > (\delta+2)/3$ nous avons

$$\mu\left\{x \in X; \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N^\beta}\sum_{k=0}^{N-1}\theta(k)f(T^{u_k}x) = 0\right\} = 1.$$

Faisons quelques remarques sur $\mathcal{H}_1$. Il est clair que δ est inférieur ou égal à 1. Pour les suites θ à valeurs dans $\mathbb{U}$ (l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1), il est bien connu (voir [**Ka**] par exemple) que δ est supérieur ou égal à 1/2.

On connaît peu de suite θ, à valeurs dans $\mathbb{U}$, vérifiant $\mathcal{H}_1$. Lorsque $u_k = k$ la suite de Rudin-Shapiro [**Ru, Shap**] et ses généralisations vérifient $\mathcal{H}_1$ pour $\delta = 1/2$. La suite de Thue-Morse vérifie $\mathcal{H}_1$ pour $\delta = (\log 3)/(\log 4)$ [**G**].

Nous avons construit une large famille de θ vérifiant $\mathcal{H}_1$. Ces θ sont des suites q-multiplicatives vérifiant une condition permettant de construire explicitement de telles suites. Voici quelques détails.

Soit $q \geq 2$ un entier. Une suite q-multiplicative $\theta = (\theta(n); n \in \mathbb{N})$ est une suite d'éléments de $\mathbb{U}$ vérifiant pour tout $t \geq 1$:

$$\theta(aq^t + b) = \theta(aq^t)\theta(b)$$

pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ avec $b < q^t$.

La suite θ est complètement déterminée par les valeurs de $\theta(jq^k)$, $(j,k) \in \{0,\cdots,q-1\} \times \mathbb{N}$. Pour être plus précis : si $n = \sum_{k\in\mathbb{N}} j_k q^k$, $j_k \in \{0,\cdots,q-1\}$, $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\theta(n) = \prod_{k\in\mathbb{N}} \theta(j_k q^k).$$

Nous nous sommes intéressés aux suites θ prenant un nombre fini de valeurs. Le résultat suivant, prouvé dans [**LMM**], nous apprend qu'alors θ est liée à des racines de l'unité :

PROPOSITION 21. *Les énoncés suivants sont équivalents.*

ı) $\theta(\mathbb{N})$ est fini ;
ıı) $\theta(\mathbb{N})$ contient un point isolé ;
ııı) Il existe $r \in \mathbb{N}$ et n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$ et tout $t \geq 0$, $\theta(tq^n)$ est une racine r-ième de l'unité.

Dans ce qui suit θ sera une suite q-multiplicative prenant un nombre fini de valeurs. Pour tout entier $N > 0$ et tout réel x posons

$$V_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1}\theta(n)e(nx) \text{ où } e(x) = e^{2i\pi x}.$$

De façon à trouver des conditions sur θ permettant d'obtenir un $\delta < 1$ vérifiant $\mathcal{H}_1$ nous avons étudié $S_N(x) = V_{q^N}(x)$. Ceci car nous avons $S_{N+1} = A_N(x)S_N(x)$, où

$$A_N(x) = \sum_{j<q}\theta(jq^N)e(jq^Nx),$$

et par conséquent

$$S_N(x) = \prod_{n=0}^{N-1} A_n(x).$$

C'est donc sur A_n que nous avons cherché des conditions.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $0 \leq j < q$ posons $\theta(jq^N) = e(b_{N,j})$, $0 \leq b_{N,j} < 1$,

$$B_N = (1, \theta(q^N), \cdots, \theta((q-1)q^N)) \text{ et } E_N(x) = (1, e(q^N x), \cdots, e((q-1)q^N x)).$$

Remarquons que $A_N(x) = B_N.E_N(x) = B_N.E_0(q^N x)$ et que $|A_n(x)|$ est inférieur à q pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus $|B_N.E_0(x)| = q$ si et seulement si pour tout $0 \leq j \leq q-1$ nous avons

$$b_{N,j} + jx \equiv 0,$$

où $a \equiv b$ signifie $\{a\} = \{b\}$, $\{.\}$ étant la fonction partie fractionnaire. Ainsi $|B_N.E_0(x)| = q$ si et seulement si

$$x \equiv -b_{N,1} \text{ et } b_{N,j} \equiv jb_{N,1} \text{ pour tout } 0 \leq j \leq q-1.$$

Lorsque l'équation $|B_N.E_0(x)| = q$ a une solution, il y en a une unique appartenant à $[0,1[$, précisément $x_N = 1 - b_{N,1}$ ($|B_N.E_0(x_N)| = q$). Le nombre x_N n'étant pas défini pour tout N, nous posons $M = \{n \in \mathbb{N}; \sup_{x\in[0,1[} |B_n.E_n(x)| = q\}$, puis

$$I = \{n \in M; n+1 \in M, \quad qx_n \equiv x_{n+1}\}.$$

et $I_N = I \cap [0,..,N-1]$. Nous dirons que θ satisfait à la **Condition (C)** s'il existe $\alpha < 1$ tel que nous ayons

$$(C) \qquad \limsup_{N\to+\infty} \frac{\#I_N}{N} \leq \alpha.$$

Remarquons que I est l'ensemble des entiers N tels que

$$(R) \qquad b_{N,j} \equiv jb_{N,1} \text{ et } b_{N+1,j} \equiv jqb_{N,1} \text{ pour tout } 0 \leq j \leq q-1.$$

Le résultat suivant (prouvé dans l'article 8) et (R) procure une façon simple de construire des suites q-multiplicatives vérifiant $\mathcal{H}_1$.

THÉORÈME 22. *Soit θ une suite q-multiplicative prenant un nombre fini de valeurs. Si θ vérifie (C) alors il existe $0 < \delta < 1$ et $K > 0$ tels que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |V_N(x)| \leq KN^\delta \textit{ pour tout } N \in \mathbb{N}.$$

2. Extensions symboliques de systèmes dynamiques

Dans l'article 4 nous avons montré que les facteurs Cantor des sous-shifts substitutifs étaient soit des sous-shifts (substitutifs) soit des odomètres. Dans l'article 5 j'ai obtenu la même conclusion pour les sous-shifts linéairement récurrents. R. Gjerde et O. Johansen se sont demandés si le même résultat était vrai pour les sous-shifts de Toeplitz dans [**GJ1**], sans toutefois pouvoir y répondre. Avec T. Downarowicz nous avons trouvé un contre-exemple : Nous construisons un facteur d'un sous-shift de Toeplitz qui n'est ni équicontinu ni expansif et qui donc ne peut être ni un odomètre ni un sous-shift. Cela a été le point de départ du travail réalisé dans l'article 9. Le résultat principal de ce travail est le suivant. Dans ce qui suit symbolique signifie sous-shift.

THÉORÈME 23. *Soient (Z,T) un système dynamique minimal et (X,S) une extension symbolique de (Z,T). Alors, il existe une extension symbolique (Y,S) presque 1-1 de (Z,T).*

La preuve de ce résultat est technique et utilise des méthodes liées au temps de retour. Elle peut être résumée grossièrement de la façon suivante.
Nous appliquons une méthode de marquage des temps de retour sur des ouverts de Z dûe à Y. Lacroix ; Les ouverts forment une suite (U_n) décroissante d'intersection réduite à un point z_0. Cette technique permet d'associer à chaque $z \in Z$ un élément $\tilde{z}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ de telle sorte que la structure des blocs de 1 dans $\tilde{z}$ indique les temps d'entrée de l'orbite de z dans les ouverts U_n. L'ensemble $\tilde{Z} = \overline{\{\tilde{z}; z \in Z\}}$ est laissé invariant par le décalage à gauche. L'application $z \mapsto \tilde{z}$ n'étant pas continue aux points visitant la frontière des U_n, le système dynamique $(\tilde{Z}, T)$, où T est le décalage à gauche, n'est pas un facteur de (Z,T). Ce n'est pas en général non plus une extension. Néanmoins elle "détient un caractère presque 1-1" car $\tilde{z_0}$ a pour unique antécédent z_0.
Appelons π le facteur de (X,S) sur (Z,T), A l'alphabet de X et considérons la nouvelle lettre $\square$. Considérons l'ensemble

$$\tilde{X} = \overline{\{\tilde{x} = (x_n, \square, \tilde{z}_n)_n ; \pi((x_n)_n) = (z_n)_n, (x_n)_n \in X\}} \subset (A \times (A \cup \{\square\}) \times \{0,1\})^{\mathbb{Z}}.$$

Cet ensemble est invariant par décalage à gauche. Le couple $(\tilde{X}, S)$ est donc un sous-shift. Il a pour facteur (X,T) et (Z,T). L'extension presque 1-1 (Y,T) de (Z,S) recherchée est obtenue par "modification" de $\tilde{X}$ en utilisant l"'espace libre" laissé par la lettre $\square$.
Du Théorème 23 nous avons déduit une caractérisation des facteurs des sous-shifts de Toeplitz.

Théorème 24. *Un système dynamique (X,T) est un facteur d'un sous-shift de Toeplitz si et seulement s'il vérifie les trois conditions suivantes*

(1) (X,T) *est minimal ;*
(2) (X,T) *est une extension presque 1-1 d'un odomètre ;*
(3) (X,T) *a une extension symbolique.*

Ce résultat est à rapprocher de la caractérisation suivante des sous-shifts de Toeplitz.

Théorème 25. [**Ma, DoLa**] *Un système dynamique (X,T) est de Toeplitz si et seulement s'il vérifie les trois conditions suivantes*

(1) (X,T) *est minimal ;*
(2) (X,T) *est une extension presque 1-1 d'un odomètre ;*
(3) (X,T) *est un sous-shift.*

Le point (3) du Théorème 24 est difficile à vérifier en général. M. Boyle et T. Downarowicz [**BD**] ont récemment donné une caractérisation de l'existence d'extension symbolique.

3. Chaos de Li-Yorke

Soit (X,T) un s.d.t. dont la distance est ϱ. Une paire de points $\{x,y\}$ est une *paire de Li-Yorke* si l'on a

$$\limsup_{n\to\infty} \varrho(T^n x, T^n y) > 0 \text{ et } \liminf_{n\to\infty} \varrho(T^n x, T^n y) = 0.$$

Un ensemble $S \subset X$ est dit *brouillé* si toute paire $\{x, y\} \subset S$ est une paire de Li-Yorke. Le système (X, T) est dit *chaotique au sens de Li et Yorke* s'il contient un ensemble brouillé non-dénombrable. Cette notion de chaos est apparu en 1975 dans [**LY**].

On sait que les systèmes dynamiques dont l'entropie est positive sont chaotiques au sens de Li-Yorke (voir [**BGKM**]). Par ailleurs les systèmes équicontinus n'ont pas de paires de Li-Yorke.

Dans l'article 13 nous avons entrepris l'étude du chaos de Li-Yorke pour les systèmes dynamiques engendrés par des substitutions primitives de longueur constante. Ce sont des systèmes dynamiques expansifs d'entropie nulle. Nous avons montré que leurs ensembles brouillés sont toujours finis et que, par conséquent, ils ne sont pas chaotiques au sens de Li-Yorke. Puis nous avons donné une caractérisation combinatoire des systèmes ayant un ensemble, vide, dénombrable ou non-dénombrable de paires de Li-Yorke. Notons que le cas "fini" n'a pas lieu d'être car si $\{x, y\}$ est une paire de Li-Yorke alors $\{T^n x, T^n y\}$ est également une paire de Li-Yorke pour tout n.

À l'aide de substitutions de longueur constante nous construisons un système dynamique ayant un ensemble brouillé dénombrable. On ne connaissait pas de tel exemple auparavant.

CHAPITRE 6

Autour des théorèmes de Cobham

1. Les Théorèmes de Cobham

L'origine de la problématique présentée ci-dessous a pour origine le travail de J. R. Büchi en 1960 [**Bu**] et la question suivante :

Étant donné un sous-ensemble E de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ est-il possible de trouver un algorithme simple qui accepte les éléments de E et rejette ceux qui n'y appartiennent pas ?

Par "algorithme simple" nous entendons un automate d'états finis. A. Cobham a donné deux réponses à cette question. En 1969 il a montré [**Cob1**] que l'existence d'un tel algorithme dépend fortement de la base de numération dans laquelle sont écrits les entiers :

Premier Théorème de Cobham. *Soient p et q deux entiers multiplicativement indépendants supérieurs à 2. Un sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ est p-reconnaissable et q-reconnaissable si et seulement si E est l'union finie de progressions arithmétiques.*

Où "p-reconnaissable" signifie qu'il existe un automate qui accepte exactement le langage constitué des écritures en base p des éléments de E.
La preuve originelle du premier Théorème de Cobham est considérée comme "presqu'élémentaire" mais très technique. En 1974 S. Eilenberg proposa dans [**Ei**] d'en trouver une preuve plus "simple". G. Hansel simplifia une partie de la preuve dans [**Ha1**]. Plus tard, en 1993, C. Michaux et R. Villemaire trouvèrent une nouvelle preuve en utilisant le formalisme de la logique du premier ordre.
On peut montrer que l'ensemble $\{2^n; n \in \mathbb{N}\}$ est 2-reconnaissable et, n'étant pas une réunion finie de progressions arithmétiques, n'est donc pas 3-reconnaissable d'après le premier Théorème de Cobham. Ce théorème nous permet également de remarquer que l'ensemble des entiers pairs est p-reconnaissable pour tout $p \geq 2$. Néanmoins il ne nous apprend rien quant à la structure des ensembles p-reconnaissables. Par exemple, il ne nous permet pas de savoir si l'ensemble des nombres premiers est reconnaissable. En fait, il ne l'est pas (voir [**Cob2**]). Le second Théorème de Cobham décrit complètement leur structure.

Second Théorème de Cobham. *Soit p un entier. Un sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ est p-reconnaissable si et seulement si sa suite caractéristique $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ($x_i = 1$ si et seulement si $i \in E$) est substitutive.*

D'autres caractérisations furent données en termes de congruences à index fini [**Ei**] et en termes de séries formelles sur des corps finis [**CKMR**]. En raison de toutes ces caractérisations, plusieurs généralisations du premier Théorème de Cobham peuvent être énoncées. La plus prolifique d'entre elles propose de l'étendre aux systèmes de numération non-standards comme celui donné par la suite de Fibonacci $U_0 = 1$, $U_1 = 2$ et $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$. C'est l'objet de la prochaine section.

2. Théorèmes de Cobham pour les systèmes de numération

Un système de numération $U = (U_n; n \in \mathbb{N})$ est une suite strictement croissante d'entiers telle que

(1) $U_0 = 1$ et
(2) l'ensemble $\left\{\frac{U_{n+1}}{U_n}; n \in \mathbb{N}\right\}$ est borné.

Pour tout $x \in \mathbb{N}$, en utilisant l'algorithme d'Euclide, nous pouvons écrire de façon unique

$$x = a_i U_i + a_{i-1} U_{i-1} + \cdots + a_0 U_0,$$

où i est l'unique entier tel que $U_i \leq x < U_{i+1}$ et $x_i = x$, $x_j = a_j U_j + x_{j-1}$, $j \in \{1, \cdots, i\}$, où a_j est le quotient de la division Euclidienne de x_j par U_j et x_{j-1} le reste, et $a_0 = x_0$. Nous dirons que $\rho_U(x) = a_i \cdots a_0$ est la *U-représentation* de x et nous poserons

$$L(U) = \{0^n \rho_U(x); n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}\}.$$

Un ensemble $E \subset \mathbb{N}$ est *U-reconnaissable* si le langage $0^* \rho_U(E) = \{0^n \rho_U(x); n \in \mathbb{N}, x \in E\}$ est reconnaissable par un automate fini.
Une propriété relativement naturelle que l'on peut exiger d'un système de numération U est que $\mathbb{N}$ soit U-reconnaissable. J. Shallit a montré dans [**Shal**] qu'alors U devait être donnée par une relation de récurrence linéaire.
Autre exigence relativement naturelle :

$$w \in L(U) \text{ si et seulement si } w0^n \in L(U) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}; \tag{9}$$

en d'autres termes, w est la représentation d'un nombre x dans la base U si et seulement si $w0$ est la représentation d'un nombre y. Cette propriété est évidemment vérifiée par tous les systèmes de numération à base entière. Les systèmes de numération ayant la propriété (9) sont appelés *systèmes de numération de Bertrand*. En 1989, A. Bertrand-Mathis a montré qu'un système de numération U est de Bertrand si et seulement s'il existe un nombre réel $\alpha > 1$ tel que $L(U) = L(\alpha)$, où $L(\alpha)$ est défini ci-dessous.
Soit $\alpha > 1$ un nombre réel. Tout $x \in [0, 1]$ s'écrit de façon unique de la manière suivante :

$$x = \sum_{n \geq 1} a_n \alpha^{-n}, \tag{10}$$

où $x_1 = x$ et pour tout $n \geq 1$, $a_n = [\alpha x_n]$ et $x_{n+1} = \{\alpha x_n\}$, où $[.]$ est la fonction partie entière et $\{.\}$ la fonction $x \mapsto x - [x]$. Nous appelons *α-écriture* de x la suite $d_\alpha(x) = (a_n; n \in \mathbb{N}^*)$ et $L(\alpha)$ l'ensemble des mots finis ayant une occurrence dans un $d_\alpha(x)$, $x \in [0, 1]$.
Si $d_\alpha(1)$ est ultimement périodique nous dirons que α est un *β-nombre*. Remarquons que tous les entiers plus grands ou égaux à 2 sont des β-nombres. Soient U un système de numération de Bertrand et $\alpha \in [0, 1[$ tels que $L(U) = L(\alpha)$. Bertrand-Mathis a montré que $\mathbb{N}$ est U-reconnaissable si et seulement si α est un β-nombre.

Ces systèmes de numération de Bertrand reconnaissant $\mathbb{N}$ fournissent une classe pour laquelle on peut chercher à étendre le Premier Théorème de Cobham.
Dans [**Bes**] A. Bès généralise le Premier Théorème de Cobham à ces systèmes de numération avec néanmoins l'hypothèse supplémentaire que les polynômes caractéristiques des suites récurrentes définissant les systèmes de numération sont les polynômes minimaux de nombres de Pisot. Les méthodes employées par Bès ne permettent pas de supprimer cette hypothèse.
Dans l'article 3 j'ai pu supprimer cette hypothèse en employant des méthodes totalement différentes de celles de Bès et de celles employées jusqu'alors pour montrer ce type de résultat. Précisément j'ai montré le résultat suivant :

THÉORÈME 26. *Soient U et V deux systèmes de numération de Bertrand, α et β deux β-nombres multiplicativement indépendants tels que $L(U) = L(\alpha)$ et $L(V) = L(\beta)$ et E un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Si E est U-reconnaissable et V-reconnaissable alors E est l'union finie de progressions arithmétiques.*

Dans mon travail ce résultat apparaît comme un corollaire d'un résultat plus général sur les substitutions qui sera décrit dans la section suivante.

3. Théorèmes de Cobham pour les substitutions

Le Second Théorème de Cobham permet d'énoncer le Premier Théorème de Cobham de la façon suivante :

Premier Théorème de Cobham (version substitutive). *Soient p et q deux entiers multiplicativement indépendants supérieurs à 2. Soient A un alphabet fini et $x \in A^{\mathbb{N}}$. Alors, la suite x est l'image par un morphisme lettre à lettre d'un point fixe d'une substitution de longueur p et l'image par un morphisme lettre à lettre d'un point fixe d'une substitution de longueur q si et seulement si elle est ultimement périodique.*

D'après le Théorème de Perron, toute matrice primitive a une valeur propre réelle et strictement positive qui est strictement plus grande que le module de n'importe quelle autre valeur propre. Nous dirons que c'est la *valeur propre dominante* de la matrice. Les valeurs propres dominantes des matrices primitives à coefficients entiers sont appelées *nombres de Perron*.
G. Hansel a conjecturé que le Premier Théorème de Cobham s'étendait à toutes les substitutions :

Conjecture. *Soient α et β deux nombres de Perron multiplicativement indépendants. Soit A un alphabet fini. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *La suite x est α-substitutive et β-substitutive ;*
(2) *La suite x est ultimement périodique.*

J'ai montré dans l'article 10 que 2) implique 1). Bien que l'on ne sache pas prouver cette conjecture, j'ai montré qu'elle était vraie si l'on considérait des points fixes de substitutions plutôt que des suites substitutives (article 10) :

THÉORÈME 27. *Supposons que x est le point fixe de la substitution σ, dont la valeur propre dominante est α, mais également celui de τ dont la plus grande valeur propre est β, où α et β sont multiplicativement indépendantes. Alors x est ultimement périodique.*

La réciproque de la conjecture de Hansel n'est toujours pas prouvée néanmoins pour certaines familles $\mathcal{S}$ de substitutions nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 28. *Soient α et β deux nombres de Perron multiplicativement indépendants et x une suite sur l'alphabet fini C. Alors, restreint à $\mathcal{S}$, si x est α-substitutive dans $\mathcal{S}$ et β-substitutive dans $\mathcal{S}$ alors x est ultimement périodique,*

où x est α-substitutive dans $\mathcal{S}$ signifie que x est l'image par un morphisme lettre à lettre d'un point fixe de substitution appartenant à $\mathcal{S}$ dont la plus grande valeur propre est α.
Ce résultat est vrai pour la famille $\mathcal{S}_{\text{const}}$ des substitutions de longueur constante, c'est la version substitutive du Premier Théorème de Cobham. Dans l'article 2 j'ai montré que c'est également vrai pour la famille $\mathcal{S}_{\text{prim}}$ des substitutions primitives, puis, dans l'article 3 pour la famille $\mathcal{S}_{\text{proj}}$ des substitutions se projetant sur une substitution primitive. Une substitution $\sigma : A \to A^*$ se projette sur la substitution primitive $\tau : B \to B^*$ s'il existe un morphisme lettre à lettre $\phi : A \to B$ tel que $\phi\sigma(a) = \tau\phi(a)$ pour toute lettre $a \in A$. Dans [**Fa**], S. Fabre a montré qu'un lien existait entre les substitutions et les systèmes de numération de Bertrand. Ce lien est analogue à celui existant entre les ensembles p-reconnaissables et les substitutions de longueur constante. Donnons quelques détails. Commençons par définir, pour tout β-nombre α, la substitution ω_α ([**Fa**]) :

– Si $d_\alpha(1) = a_1 \cdots a_n 0^\omega$, $a_n \neq 0$, alors ω_α est définie sur l'alphabet $\{1, \cdots, n\}$ par
$$\begin{array}{ll} 1 & \to 1^{a_1}2; \\ \vdots & \\ n-1 & \to 1^{a_{n-1}}n; \\ n & \to 1^{a_n}. \end{array}$$
– Si $d_\alpha(1) = a_1 \cdots a_n (a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+m})^\omega$, où n et m sont minimaux et où $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m} \neq 0$, alors ω_α est définie sur l'alphabet $\{1, \cdots, n+m\}$ par
$$\begin{array}{ll} 1 & \to 1^{a_1}2; \\ \vdots & \\ n+m-1 & \to 1^{a_{n+m-1}}(n+m); \\ n+m & \to 1^{a_{n+m}}(n+1). \end{array}$$

Remarquons que dans les deux cas la substitution ω_α est primitive et que α est la valeur propre dominante de M_{ω_α}. Nous appellerons *ω_α-substitution* toute substitution qui se projette sur la substitution ω_α et nous appellerons suite *ω_α-substitutive* (α-automatique dans [**Fa**]) toute suite qui est l'image par un morphisme lettre à lettre du point fixe d'une ω_α-substitution. Dans [**Fa**] Fabre a montré le résultat suivant :

THÉORÈME 29. *Soit U un système de Bertrand tel que $L(U) = L(\alpha)$ où α est un β-nombre. Une partie E de $\mathbb{N}$ est U-reconnaissable si et seulement si sa suite caractéristique $(x_n; n \in \mathbb{N})$ (i.e. $x_n = 1$ si $n \in E$ et $x_n = 0$ sinon) est ω_α-substitutive.*

Ces substitutions appartiennent à S_{proj}. C'est grâce au Théorème 29 que le Théorème 28 pour S_{proj} a pour corollaire le Théorème 26. Dans l'article 3 j'ai montré le Théorème 28 pour la famille $\mathcal{S}$ des substitutions se projetant sur une substitution primitive. Dans l'article 10, j'ai montré le Théorème 28 pour la famille de substitutions $\mathcal{S}_{\text{bonne}}$ des "bonnes substitutions". Voici comment on définit les bonnes substitutions.

Soit $\sigma : A \to A^*$ une substitution. Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\overline{A} \subset A$ tels que $\sigma^p(\overline{A}) \subset \overline{A}^*$ et que la restriction de σ à $\overline{A}$ est une substitution primitive. Nous notons $\overline{\sigma} : \overline{A} \to \overline{A}^*$, $x \mapsto \sigma^p(x)$, cette substitution et l'appelons *sous-substitution* de σ. On peut montrer que toute substitution a au moins une sous-substitution. Évidemment les valeurs propres de la matrice d'une sous-substitution de σ sont des valeurs propres de σ.
Nous appelons $\mathcal{S}_{\text{bonne}}$ la famille des substitutions ayant une sous-substitution de même valeur propre dominante. Toutes ne sont pas ainsi. Par exemple la substitution $a \mapsto aaab$, $b \mapsto bb$, a pour plus grande valeur propre 3 et sa seule sous-substitution ($b \mapsto bb$) a pour plus grande valeur propre 2. Les substitutions de $\mathcal{S}_{\text{prim}}$ ont pour unique sous-substitution elle-même. Une sous-substitution d'une substitution de longueur constante égale à p est de longueur constante égale à p. Par conséquent $\mathcal{S}_{\text{prim}}$ et $\mathcal{S}_{\text{const}}$ sont contenues dans $\mathcal{S}_{\text{bonne}}$.

En guise de remarque, comparons cette famille $\mathcal{S}_{\text{bonne}}$ à la classification des points fixes de substitutions, par rapport à leur complexité combinatoire, obtenue par J.-J. Pansiot dans [**Pan**].
Soit σ une substitution. Elle est *quasi-uniforme* si toutes les lettres ont le même ordre de croissance θ^n, $\theta > 1$: Pour toute lettre b il existe deux réels $c > 0$ et d tels que $c\theta^n \leq |\sigma^n(a)| \leq d\theta^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est *polynomialement divergente* s'il existe θ tel que pour toute lettre a l'ordre de croissance est de la forme $n^{e(a)}\theta^n$, où $e(a) \in \mathbb{N}$ avec des $e(a)$ non-nuls. Elle est *exponentiellement divergente* s'il existe deux lettres a et b telles que leurs ordres de croissance sont respectivement de la forme $n^{e(a)}\theta(a)^n$ et $n^{e(b)}\theta(b)^n$, où $1 < \theta(a) < \theta(b)$. Notons $\mathcal{S}_{\text{qunif}}$, $\mathcal{S}_{\text{poldiv}}$ et $\mathcal{S}_{\text{expodiv}}$ les familles de substitutions correspondantes. Pansiot a noté dans [**Pan**] que toute substitution appartenait nécessairement à l'une de ces trois classes. Il a surtout montré que la complexité combinatoire des substitutions appartenant à ces familles sont respectivement de l'ordre de n, $n \log\log n$ et $n \log n$.
On peut remarquer que

$$\mathcal{S}_{\text{prim}} \cup \mathcal{S}_{\text{proj}} \subset \mathcal{S}_{\text{qunif}} \subset \mathcal{S}_{\text{bonne}} \text{ et } \mathcal{S}_{\text{poldiv}} \subset \mathcal{S}_{\text{bonne}}.$$

Il reste donc à traiter la famille $\mathcal{S}_{\text{expodiv}}$ sachant qu'elle est d'intersection non vide avec $\mathcal{S}_{\text{bonne}}$
Les substitutions $\sigma : A \to A^*$ traitées dans mes travaux ont la propriété d'être croissante : pour tout $a \in A$ nous avons $\lim_{n \to +\infty} |\sigma^n(a)| = +\infty$. Si σ est une substitution non-croissante telle que l'image de l'une de ses lettres est le mot vide, alors on dit que σ est *effaçante*. Ce cas n'est pas gênant car le Théorème 7.5.1 de [**AS**] permet toujours de se ramener au cas non-effaçant.
Si σ est une substitution non-croissante et que les blocs de lettres non-croissantes sont bornés alors ont peut également se ramener au cas croissant (Théorème 4.1 [**Pan**]).
Un travail est en cours pour clarifier ces situations et obtenir un théorème de type Cobham pour des substitutions quelconques (i.e. possiblement non-croissantes et, ou, effaçantes).

4. Dynamique et théorème de Cobham

Un résultat important dans la preuve du Théorème 26 et du Théorème 28 pour $\mathcal{S}_{\text{bonne}}$ est le suivant :

THÉORÈME 30. *Soient α et β deux réels. Soient x et y deux suites non-périodiques respectivement α-substitutive primitive et β-substitutive primitive telles que $L(x) = L(y)$. Alors α et β sont multiplicativement dépendants,*

où $L(x)$ et $L(y)$ sont les langages des suites x et y. On a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 31. *Soient (X,T) et (Y,T) deux systèmes dynamiques non-périodiques engendrés respectivement par les substitutions primitives σ et τ. Si (X,T) et (Y,T) sont isomorphes alors les valeurs propres dominantes des matrices de σ et τ sont multiplicativement dépendantes.*

La réciproque n'est pas vraie.
Ce résultat peut se montrer autrement en utilisant le Théorème 20 de l'article 5 et le résultat suivant montré par C. Holton et L. Zamboni dans [**HZ2**] :

THÉORÈME 32. *Soient (X,T) un système dynamique engendré par une suite α-substitutive primitive x et μ son unique mesure ergodique. Alors, l'ensemble des mesures des cylindres de X est contenu dans une réunion finie de progressions géométriques. Plus précisément, il existe un ensemble fini $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}_+$ tel que*

$$\{\mu([u]); u \in L(x)\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha^{-n}\mathcal{F}.$$

Un résultat analogue peut-être prouvé pour les diagrammes de Bratteli stationnaires. Ainsi on peut envisager une preuve du Corollaire 31 utilisant les diagrammes de Bratteli.

5. Lacunes bornées et densité

Toutes les preuves du Premier Théorème de Cobham commencent par montrer que si l'ensemble d'entiers E est p et q-reconnaissable alors E est syndétique, c'est à dire que la différence entre deux entiers consécutifs de E est bornée. C'est aussi la démarche utilisée dans la preuve du Théorème 26.
Dans la version substitutive du Premier Théorème de Cobham ainsi que dans le Théorème 28 cette étape correspond à montrer que la suite x a la propriété suivante : les lettres apparaissant une infinité de fois dans x apparaissent à lacunes bornées dans x. La preuve de cette propriété tient dans le fait que si $\sigma : A \to A^*$ et $\tau : B \to B^*$ sont deux substitutions dont les valeurs propres dominantes sont multiplicativement indépendantes alors l'ensemble

$$\left\{\frac{|\sigma^n(a)|}{|\tau^m(b)|}; n, m \in \mathbb{N}\right\} \text{ est dense dans } \mathbb{R}_+ \tag{11}$$

pour tout $(a,b) \in A \times B$. Si σ est de longueur p alors $|\sigma^n(a)| = p^n$. Pour la famille $\mathcal{S}_{\text{const}}$ la propriété (11) est le corollaire immédiat du résultat classique suivant : si deux nombres réels $\alpha, \beta > 1$ sont multiplicativement indépendants alors l'ensemble $\{\alpha^n/\beta^m; n, m \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$. Il en va de même pour les familles $\mathcal{S}_{\text{prim}}$ et $\mathcal{S}_{\text{proj}}$ car si $\sigma : A \to A^*$ est une substitution de $\mathcal{S}_{\text{prim}} \cup \mathcal{S}_{\text{proj}}$ dont la valeur propre dominante est α alors $|\sigma^n(a)|$ est de l'ordre de α^n. Il en va différemment pour toutes les substitutions, en effet si $\sigma : A \to A^*$ est une substitution quelconque dont la valeur propre dominante est α alors $|\sigma^n(a)|$ est de l'ordre de $n^d\alpha^n$ où $d \in \mathbb{N}$. Par conséquent j'ai dû montré dans l'article 10 le résultat suivant.

THÉORÈME 33. *Soient* $\alpha, \beta > 1$ *deux réels multiplicativement indépendants et* $d, e \geq 0$ *deux entiers. Alors l'ensemble*

$$\left\{\frac{n^d \alpha^n}{m^e \beta^m}; m, n \in \mathbb{N}\right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Ainsi j'ai obtenu le résultat général qui suit et qui est un premier pas vers la conjecture.

THÉORÈME 34. *Soient* α *et* β *deux nombres de Perron multiplicativement indépendants. Si la suite* x *est* α*-substitutive et* β*-substitutive alors les lettres apparaissant une infinité de fois dans* x *apparaissent à lacunes bornées dans* x.

Grâce au Théorème précédent je montre, sous les mêmes hypothèses, que les mots apparaissant une infinité de fois dans x apparaissent à lacunes bornées dans x. Puis, pour la famille $\mathcal{S}_{\text{bonne}}$ que x est ultimement périodique en utilisant des mots de retour et les sous-substitutions primitives. Malheureusement des idées restent à trouver pour traiter les substitutions n'appartenant pas à $\mathcal{S}_{\text{bonne}}$.

6. Perspectives : les bases de numération complexe

Dans [**HS**], G. Hansel et T. Safer ont tenté d'établir un théorème "de type Cobham" pour l'ensemble $\mathcal{G}$ des entiers de Gauss (i.e les nombres complexes de la forme $a + ib$, $a, b \in \mathbb{Z}$). I. Kátai et J. Szabó ont montré dans [**KS**] que les seuls systèmes de numération "naturels" pour les entiers de Gauss sont ceux dont la base est de la forme $-p + i$ (ou $-p - i$), $p \geq 1$. Dans ce cas l'alphabet de numération est $\{0, 1, \ldots, p^2\}$. Hansel et Safer ont noté que deux bases $\alpha = -p + i$ et $\beta = -q + i$, avec $p \neq q$, sont toujours multiplicativement indépendantes. Par conséquent ils suggèrent la conjecture suivante :

Une partie E *des entiers de Gauss est* α*-reconnaissable et* β*-reconnaissable si et seulement si c'est une partie périodique de* $\mathcal{G}$*, à un ensemble fini près.*

Hansel et Safer ont montré que la condition est suffisante. Puis, pour montré que la condition est nécessaire, ils ont tenté de suivre la démarche habituelle en matière de théorème de Cobham. Malheureusement, ils n'ont pas réussi à montrer que l'ensemble

$$\left\{\frac{(-p+i)^n}{(-q+i)^m}; n, m \in \mathbb{Z}\right\}$$

est dense dans $\mathbb{C}$. Néanmoins en supposant ceci vrai ils ont montré que E est nécessairement syndétique mais ils n'ont pas réussi à montrer qu'il était périodique. Il me semble intéressant de rechercher les implications des différents théorèmes de type Cobham sur cette conjecture.

CHAPITRE 7

Liste des travaux

Les numéros d'articles suivis de "*" correspondent aux articles intégralement tirés de ma thèse de doctorat.

Article 1* : A characterization of substitutive sequences using return words, Discrete Mathematics 179 (1998), 89–101.

Article 2* : A generalization of Cobham's theorem, Theory of Computing Systems 31 (1998), 169–185.

Article 3 : Sur les ensembles d'entiers reconnaissables, J. de Théorie des Nombres de Bordeaux 10 (1998), 65–84.

Article 4* : Substitution dynamical systems, Bratteli diagrams and dimension groups, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 19 (1999), 953–993. (avec B. Host et C. Skau)

Article 5 : Linearly recurrent subshifts have a finite number of subshift factors, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 20 (2000), 1061–1078.

Article 5 bis : Corrigendum and addendum to : Linearly recurrent subshifts have a finite number of non-periodic factors, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 23 (2003), 663-669.

Article 6 : Orbit equivalence and Kakutani equivalence with sturmian subshifts, Studia Math. 142 (2000), 25–45. (avec P. Dartnell et A. Maass)

Article 7 : Limit laws of entrance times for low complexity Cantor minimal systems, Nonlinearity 14 (2001), 683–700. (avec A. Maass)

Article 8 : Ergodic averages with deterministic weights, Annales de l'Institut Fourier 52 (2002), 559–581. (avec D. Schneider)

Article 9 : Factors of Toeplitz flows and other almost 1-1 extensions over group rotations, Math. Scand. 90 (2002), 57–72. (avec T. Downarowicz)

Article 10 : A Theorem of Cobham for non primitive substitutions, Acta Arithmetica 104 (2002), 225–241.

Article 11 : Continuous and measurable eigenfunctions of linearly recurrent dynamical Cantor systems, J. of the London Mathematical Society 67 (2003), 790-804. (avec M. I. Cortez, B. Host et A. Maass)

Article 12 : A note on limit laws for minimal Cantor systems with infinite periodic spectrum, Discrete and Continuous Dynamical Systems 9 (2003), 745-750. (avec A. Maass)

Article 13 : Constant-length substitutions and countable scrambled sets, Nonlinearity 17 (2004), 817-833. (avec F. Blanchard et A. Maass)

Article 14 : Local rates of Poincaré recurrence for rotations and weak mixing, à paraître dans Discrete and Continuous Dynamical Systems**.** (avec J.-R. Chazottes)

Article 15 : Necessary and sufficient conditions to be an eigenvalue for linearly recurrent dynamical Cantor systems, soumis à Journal of the London Mathematical Society. (avec X. Bressaud et A. Maass)

Bibliographie

[Af] V. Afraimovich, *Pesin's dimension for Poincaré recurrences*, Chaos 7 (1997), 12–20.

[ACS1] V. Afraimovich, J.-R. Chazottes, B. Saussol, *Local dimensions associated with Poincaré recurrences*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 6 (2000), 64-74.

[ACS2] V. Afraimovich, J.-R. Chazottes, B. Saussol, *Pointwise dimensions for Poincaré recurrences associated with maps and special flows*, Discrete and Cont. Dynam. Syst. 9 (2003), 263-280.

[AS] J.-P. Allouche, J. Shallit, *Automatic sequences. Theory, applications, generalizations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[Bes] A. Bès, *An Extension of Cobham-Semënov Theorem*, J. Symbolic Logic 65 (2000), 201-211.

[BGKM] F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada, A. Maass, *On Li-Yorke pairs*, J. Reine Angew. Math. 547 (2002), 51-68.

[Bo] M. Boyle, *Topological orbit equivalence and factor maps in symbolic dynamics*, Ph. D. thesis, Univ. of Wash., 1983.

[BD] M. Boyle, T. Downarowicz, *The Entropy theory of symbolic extensions*, Inventiones Mathematicae 156 (2004), 119-161

[Br] O. Bratteli, *Inductive limit of finite-dimensional C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 171 (1972), 195-234.

[Bu] Büchi, J. R., *Weak Second-Order Arithmetic and Finite Automata*, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 6 (1960), 66-92.

[Ca] J. Cassaigne, *Special factors of sequences with linear subword complexity*, Developments in language theory, II (Magdeburg, 1995), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996, 25-34.

[CKMR] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès-France et G. Rauzy, *Suites Algébriques et Substitutions*, Bull. Soc. Math. France 10 (1980), 401-419.

[Cob1] A. Cobham, *On the Base-Dependence of Sets of Numbers Recognizable by Finite Automata*, Math. Syst. Theo. 3 (1969), 186-192.

[Cob2] A. Cobham, *Uniform Tag Sequences*, Math. Syst. Theo. 6 (1972), 164-192.

[Coe] Z. Coelho, *Asymptotic laws for symbolic dynamical systems*, London Mathematical Society, Lecture Notes Series 279, Cambridge University Press (2000), 123-165.

[CC1] Z. Coelho, P. Collet, *Limit law for the close approach of two trajectories in expanding maps of the circle*, Probab. Theory Related Fields 99 (1994), 237-250.

[CC2] Z. Coelho, P. Collet, *Asymptotic limit law for subsystems of shifts of finite type*, preprint (2000).

[CdF] Z. Coelho, E. de Faria, *Limit laws of entrance times for homeomorphisms of the circle*, Israel Journal of Mathematics 93 (1996), 93-112.

[CG] P. Collet, A. Galves, *Asymptotic distribution of entrance times for expanding maps of the interval*, Dynamical systems and applications, 139-152, World Sci. Ser. Appl. Anal., 4, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995.

[CFS] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, Y. G. Sinaĭ, *Ergodic theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 245. Springer-Verlag, New York, 1982.

[DaLe] D. Damanik and D. Lenz, *Linear repetitivity, I. Uniform subadditive ergodic theorems and applications*, Discrete Comput. Geom. 26 (2001), no. 3, 411-428.

[Doo] Doob, J. L., Stochastic Processes, Wiley publications in statistics (1953).

[Dow] T. Downarowicz, Entropy structure, soumis.

[DoLa] T. Downarowicz, Y. Lacroix, *Almost 1-1 extensions of Furstenberg-Weiss type*, Studia Math. 130 (1998), 149-170.

[Ei] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, Vol.A, Academic Press, New York 1974.

[El] G. A. Elliott, *On the classification of inductive limit of sequences of semi-simple finite dimensional algebras*, J. Algebra 38 (1976), 29-44.

[Fa] S. Fabre, *Substitutions et β-Systèmes de Numération*, Theoret. Comput. Sci. 137 (1995), 219-236.

[Fe] S. Ferenczi, *Rank and symbolic complexity*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 16 (1996), 663-682.

[Fog] Fogg, N. Pytheas , *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, edited by V. Berth, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel, Lecture Notes in Mathematics, 1794. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[For] A. Forrest, *K-groups associated with substitution minimal systems*, Israel J. Math. 98 (1997), 101-139.

[G] A. O. Gel'fond, *Sur les nombres qui ont des propriétś additives et multiplicatives données*, Acta Arith. 13 (1967/1968), 259-265.

[GPS] T. Giordano, I. Putnam and C. F. Skau, *Topological orbit equivalence and C^*–crossed products*, J. reine angew. Math. 469 (1995), 51-111.

[GJ1] R. Gjerde, O. Johansen, *Bratteli-Vershik models for Cantor minimal systems : applications to Toeplitz flows*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 20 (2000), 1687-1710.

[GJ2] R. Gjerde, O. Johansen, *Bratteli-Vershik models for Cantor minimal systems associated to interval exchange transformations*, Math. Scand. 90 (2002), 87-100.

[Ha1] G. Hansel, *A Propos d'un Théorème de Cobham*, Actes de la Fête des Mots, D. Perrin Ed., GRECO de Programmation, Rouen 1982.

[HS] G. Hansel, T. Safer, *Vers un théorème de Cobham pour les entiers de Gauss*, preprint (2003).

[HM] A. Hedlund, M. Morse, *Symbolic Dynamics II. Sturmian trajectories*, American J. of Math. 62 (1940), 1-42.

[HPS] R. H. Herman, I. Putnam, C. F. Skau, *Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics*, Internat. J. of Math. 3 (1992), 827-864.

[Hi] M. Hirata, *Poisson law for axiom A diffeomorphisms*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 13 (1993), 533-556.

[HSV] M. Hirata, B. Saussol, S. Vaienti, *Statistics of return times : a general framework and new applications*, Comm. Math. Phys. 206 (1999), 33-55.

[HZ1] C. Holton, and L. Q. Zamboni, Descendants of Primitive Substitutions, *Theory Comput. Syst.*, 32 (1999), 133-157.

[HZ2] C. Holton and L. Q. Zamboni, *Directed graphs and substitutions*, Theory Comput. Syst. 34 (2001), 545-564.

[Ho] B. Host, *Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 6 (1986), 529-540.

[Ka] J.-P. Kahane, *Some random series of functions*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1985.

[KS] I. Katái, J. Szabó, *Canonical number systems for complex integers*, Acta Sci. Math. Hung. 37 (1975), 255-260.

[Ku] M. Kupsa, *Local return rates in Sturmian shifts*, preprint.

[La] Y. Lacroix, *Possible limit laws for entrance times of an ergodic aperiodic dynamical system*, Israel J. Math. 132 (2002), 253-263.

[LP] J. C. Lagarias and P. A. B. Pleasants, *Repetitive Delone sets and quasicrystals*, Ergodic Theory Dynam. Systems 23 (2003), 831-867.

[LMM] E. Lesigne, C. Mauduit, B. Mossé, *Le théorème ergodique le long d'une suite q-multiplicative*, Compositio Math. 93 (1994), 49-79.

[LY] T.Y. Li, J.A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly 82, 985–992 (1975).

[Lo] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 90, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Ma] N. G. Markley, *Substitution-like minimal sets*, Israel J. Math. 22 (1975), 332-353.

[Or] N. Ormes, *Strong orbit realizations for minimal homeomorphisms*, J. Anal. Math. 71 (1997), 103-133.

[ORS] N. Ormes, C. Radin, L. Sadun, *A homeomorphism invariant for substitution tiling spaces*, Geom. Dedicata 90 (2002), 153–182.

[Pan] J.-J. Pansiot, *Complexité des facteurs des mots infinis engendrés par morphismes itérés*, Lect. Notes in Comp. Sci. 172 (1984), 380-389.

[Par] B. Parvaix, *Substitution invariant Sturmian bisequences*, J. Théor. Nombres Bordeaux 11 (1999), 201-210.

[Pi] B. Pitskel, *Poisson limit law for Markov chains*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 11 (1991), 501-513.

[Pr1] N. M. Priebe, *Towards a characterization of self-similar tilings in terms of derived Voronoï tessellations*, Geom. Dedicata 79 (2000), 239-265.

[Pr2] N. M. Priebe, *Detecting combinatorial hierarchy in tilings using derived Voronoï tessellations*, Discrete Comput. Geom. 29 (2003), 459–476.

[PS] N. M. Priebe, B. Solomyak, *Characterization of planar pseudo-self-similar tilings*, Discrete Comput. Geom. 26 (2001), 289-306.

[Qu] M. Queffélec, *Substitution Dynamical Systems-Spectral Analysis*, Lecture Notes in Math. 1294 (1987).

[RW] J. M. Rosenblatt and M. Wierdl, *Pointwise ergodic theorems via harmonic analysis*, Ergodic theory and its connections with harmonic analysis (Alexandria, 1993), 3–151, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 205, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[Ru] W. Rudin, *Some theorems on Fourier coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 855-859.

[Shal] J. Shallit, *Numeration systems, linear recurrences and regular sets*, Theo. Comp. Sci. 61 (1988), 1-16.

[Shap] H. Shapiro, *Extremal problems for polynomials and power series*, Thesis, M.I.T, 1952.

[Si] A. Siegel, *Représentation des systèmes dynamiques substitutifs non unimodulaires*, Ergodic Theory Dynam. Systems 23 (2003), 1247–1273.

[So] B. Solomyak, *Dynamics of self-similar tilings*, Ergodic Theory Dynam. Systems 17 (1997), no. 3, 695–738.

[Su] F. Sugisaki, *The relationship between entropy and strong orbit equivalence for the minimal homeomorphisms. II*, Tokyo J. Math. 21 (1998), 311-351.

[Ve] A. M. Vershik, *A theorem on the Markov periodical approximation in ergodic theory*, J. Sov. Math. 28 (1985), 667-674.

[Wi] S. Williams, *Toeplitz minimal flows which are not uniquely ergodic*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 67 (1984), 95-107.